Föreläsning 10:

Repetition: $\mathbb{E}$ är ett Euklidiskt rum med skalärprodukt $(\cdot|\cdot)$.

Om $\mathbb{U}$ är ett delrum till $\mathbb{E}$, då är även

$\mathbb{U}^{\perp} = \{\bar{u} \in \mathbb{E} : (\bar{u}|\bar{v}) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{U}\}$ ett delrum

kallat det ortogonala komplementet till $\mathbb{U}$.

Varje vektor $\bar{u} \in \mathbb{E}$ kan på entydigt sätt skrivas på formen

$$\bar{u} = \bar{u}_{\parallel \mathbb{U}} + \bar{u}_{\perp \mathbb{U}}$$

där $\bar{u}_{\parallel \mathbb{U}} \in \mathbb{U}$, $\bar{u}_{\perp \mathbb{U}} \in \mathbb{U}^{\perp}$.

(OBS! $\bar{u}_{\perp \mathbb{U}} = \bar{u}_{\parallel \mathbb{U}^{\perp}}$).

Om $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m)$ är en <u>ON-bas</u> till $\mathbb{U}$ då gäller att

$$\bar{u}_{\parallel \mathbb{U}} = (\bar{u}|\bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{u}|\bar{u}_2)\bar{u}_2 + \dots + (\bar{u}|\bar{u}_m)\bar{u}_m.$$

Vi kommer nedan speciellt vilja jobba med $\mathbb{M}_{r\times 1}$ och använda skalärprodukten

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_r y_r \text{ "=" } (x_1\ x_2 \cdots x_r)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}.$$

OBS! $(x_1\ x_2 \cdots x_r)^t = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}$

1) Låt $\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \mathbb{U} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$.

Utvidga $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ till en bas till $M_{4\times1}$ och skapa utifrån denna en ON-bas. Ange även en bas till $\mathbb{U}^\perp$.

Lösning:

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 2 & x_4 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ -2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 2x_2 \end{array}\right)$$

Så $\mathbb{U} = \{ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^t : x_3 - x_1 = 0,\ x_4 - 2x_2 = 0 \}$

Vi väljer nu först $\bar{v}_3$ s.a.

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3] = \{ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4)^t : x_3 - x_1 = 0 \},$$

d.v.s. $\bar{v}_3$ som uppfyller $x_3 - x_1 = 0$ <u>men ej</u> $x_4 - 2x_2 = 0$.

T.ex $\bar{v}_3 = (1\ 1\ 1\ 0)^t$.

Slutligen väljer vi $\bar{v}_4$ som ej uppfyller $x_3 - x_1 = 0$, t.ex.

$\bar{v}_4 = (0\ 0\ 1\ 0)^t$.

Så

$\bar{v}_1 = (1\ 0\ 1\ 0)^t$, $\bar{v}_2 = (0\ 1\ 0\ 2)^t$, $\bar{v}_3 = (1\ 1\ 1\ 0)^t$

$\bar{v}_4 = (0\ 0\ 1\ 0)^t$ är nu en bas till $M_{4\times 1}$.

③

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{|\bar{v}_1|}\bar{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1\ 0\ 1\ 0)^t$$

$$\bar{w}_2 = \bar{v}_2 - (\bar{v}_2|\bar{e}_1)\bar{e}_1 = (0\ 1\ 0\ 2)^t - \frac{1}{2}((0\ 1\ 0\ 2)^t|(1\ 0\ 1\ 0)^t)(1\ 0\ 1\ 0)^t =$$

$$= (0\ 1\ 0\ 2)^t$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{|\bar{w}_2|}\bar{w}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0\ 1\ 0\ 2)^t.$$

$$\bar{w}_3 = \bar{v}_3 - (\bar{v}_3|\bar{e}_1)\bar{e}_1 - (\bar{v}_3|\bar{e}_2)\bar{e}_2 = (1\ 1\ 1\ 0)^t - \frac{1}{2}((1\ 1\ 1\ 0)^t|(1\ 0\ 1\ 0)^t)(1\ 0\ 1\ 0)^t$$

$$-\frac{1}{5}((1\ 1\ 1\ 0)^t|(0\ 1\ 0\ 2)^t)(0\ 1\ 0\ 2)^t =$$

$$= (1\ 1\ 1\ 0)^t - (1\ 0\ 1\ 0)^t - \frac{1}{5}(0\ 1\ 0\ 2)^t = \frac{1}{5}(0\ 4\ 0\ -2)^t =$$

$$= \frac{2}{5}(0\ 2\ 0\ -1)^t$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{|\bar{w}_3|}\bar{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(0\ 2\ 0\ -1)^t.$$

$$\bar{w}_4 = \bar{v}_4 - (\bar{v}_4|\bar{e}_1)\bar{e}_1 - (\bar{v}_4|\bar{e}_2)\bar{e}_2 - (\bar{v}_4|\bar{e}_3)\bar{e}_3 = \ldots = \frac{1}{2}(-1\ 0\ 1\ 0)^t$$

$$\bar{e}_4 = \frac{1}{|\bar{w}_4|}\bar{w}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1\ 0\ 1\ 0)^t$$

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ är ON-bas till U

$(\bar{e}_3\ \bar{e}_4)$ är ON-bas till $U^\perp$

$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\ \bar{e}_4)$ är ON-bas till $M_{4\times 1}$.

Sats: Givet $\bar{u} \in E$, U delrum till E.

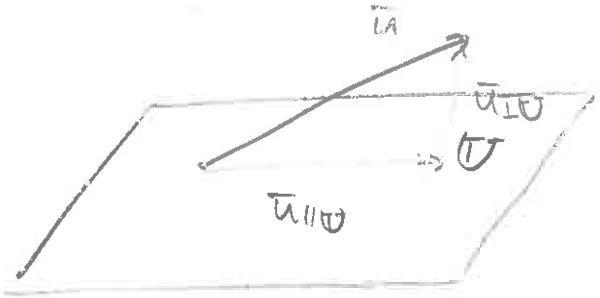
Då gäller att

(1) $|\bar{u}_{\parallel U}| \leq |\bar{u}|$

(2) $|\bar{u}_{\perp U}| \leq |\bar{u} - \bar{v}| \quad \forall \bar{v} \in U$.

D.v.s. avståndet mellan $\bar{u}$ och U ges av $|\bar{u}_{\perp U}|$.

Bevis:



Pythagoras ger $|\bar{u}|^2 = |\bar{u}_{\parallel U}|^2 + |\bar{u}_{\perp U}|^2 \geq |\bar{u}_{\parallel U}|^2$ vilket ger (1).

Men vi har för $\bar{v} \in U$:

$$\bar{u} - \bar{v} = \underbrace{(\bar{u} - \bar{u}_{\parallel U})}_{\in U^\perp} + \underbrace{(\bar{u}_{\parallel U} - \bar{v})}_{\in U}$$ så Pythagoras igen ger

$$|\bar{u} - \bar{v}|^2 = |\bar{u}_{\perp U}|^2 + |\bar{u}_{\parallel U} - \bar{v}|^2 \geq |\bar{u}_{\perp U}|^2.$$ V.S.B.

Minsta kvadratmetoden (3 ekv. 2 obek.-fallet).

Antag att vi får tre ekvationer med två obekanta

$$\begin{cases} a_1 x_1 + b_1 x_2 = y_1 \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 = y_2 \\ a_3 x_1 + b_3 x_2 = y_3 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}}_{Y} \iff AX = Y$$

Normalt finns ingen lösning till denna ekvation men vi vill hitta x_1, x_2 sådan att avståndet

$|AX - Y|$ minimeras i $\mathbb{M}_{3\times 1}$. D.v.s. sådant att

$|AX - Y|^2$ minimeras.

Notera nu att

$$AX = x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Vi inför nu kolumnrummet till A

$$\mathbb{U} = \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{M}_{3\times 1}.$$

Notera nu alltså att vi vill hitta $Z = AX \in \mathbb{U}$ sådant att $|Z - Y|$ blir så litet som möjligt.

Vi såg ovan att vi då ska välja $Z = Y_{\parallel \mathbb{U}}$.

D.v.s. Vi ska välja $Z = x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

sådan att $Y - Z \perp U$. Detta är ekvivalent med

att

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\left(\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \middle| \, x_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (a_1 \; a_2 \; a_3)(AX - Y) = 0$$

$$(b_1 \; b_2 \; b_3)(AX - Y) = 0$$

Notera nu att detta är samma sak som att

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} (AX - Y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A^t(AX - Y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{A^tAX = A^tY.}$$

Detta kallas <u>normalekvationerna</u> till systemet $AX = Y$.

Denna har alltid (minst) en lösning, och vidare gäller att

$AX = Y_{\parallel U}$ för alla lösningar X.

2) Hitta den linje $y = kx + m$ som i minstakvadrat-mening bäst ansluter till punkterna $(0,1)$, $(1,3)$ och $(4,7)$.

Lösning:

Vi vill ha

$$\begin{cases} 1 = k\cdot 0 + m \\ 3 = k\cdot 1 + m \\ 7 = k\cdot 4 + m \end{cases} \iff \begin{cases} m = 1 \\ k + m = 3 \\ 4k + m = 7 \end{cases} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}}_{Y}$$

Normalekvationen tas fram: $A^tAX = A^tY$

$$A^tA = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

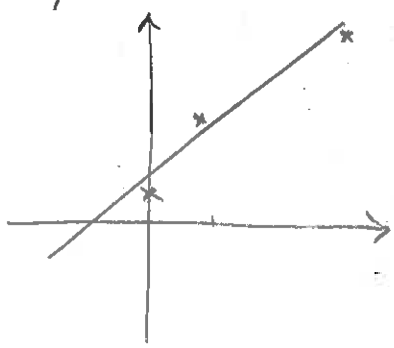
$$A^tY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$A^tAX = A^tY$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 17 & 5 & 31 \\ 5 & 3 & 11 \end{array}\right) -3 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & -2 \\ 5 & 3 & 11 \end{array}\right) \leftarrow \tfrac{1}{2} \quad -5 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 13 & 16 \end{array}\right) \tfrac{2}{13} \leftarrow \tfrac{1}{13} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 19/13 \\ 0 & 1 & 16/13 \end{array}\right)$$

SVAR: $y = \frac{19}{13}x + \frac{16}{13}$



$y(0) \approx 1.2$

$y(1) \approx 2.7$

$y(4) \approx 7.1$