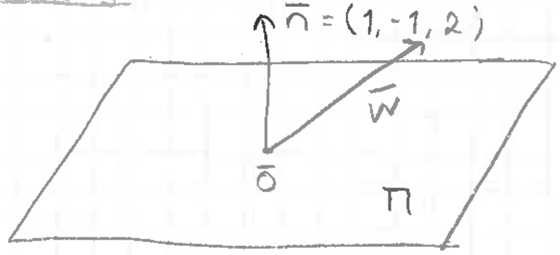
FÖRELÄSNING 11:

1) Låt planet

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

Bestäm en ekvation på parameterform till Π samt beräkna $\overline{w}_{\|\Pi}$ då $\overline{w} = (1,2,0)$.

Lösning:



$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = s - 2t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$\iff (x_1, x_2, x_3) = s\underbrace{(1,1,0)}_{\overline{u}_1} + t\underbrace{(-2,0,1)}_{\overline{u}_2} \quad s,t \in \mathbb{R}$$

D.v.s $\Pi = [\overline{u}_1, \overline{u}_2]$.

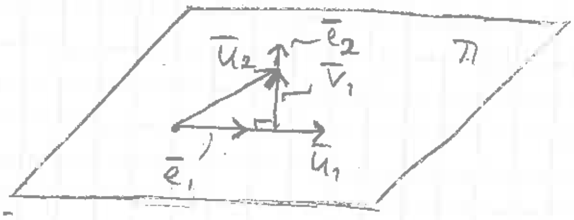
För att bestämma $\overline{w}_{\|\Pi}$ har vi två alternativ.
Notera att Π ä ett delrum till $\mathbb{R}^3$ (d.v.s. planet går genom origo), och $\Pi^\perp = \{t\overline{n} : t \in \mathbb{R}\}$.
Vi har $\overline{w} = \overline{w}_{\|\Pi} + \overline{w}_{\|\Pi^\perp} = \overline{w}_{\|\Pi} + \overline{w}_{\|\overline{n}}$,
så vi kan beräkna $\overline{w}_{\|\overline{n}}$ och få ut $\overline{w}_{\|\Pi}$, alternativt bestämmer vi en ON-bas till Π och beräknar $\overline{w}_{\|\Pi}$ direkt.

Alt 1: $\overline{w}_{\|\overline{n}} = \dfrac{\overline{w} \cdot \overline{n}}{|\overline{n}|^2}\overline{n} = \dfrac{(1,2,0)\cdot(1,-1,2)}{6}(1,-1,2) = -\dfrac{1}{6}(1,-1,2)$

så $\overline{w}_{\|\Pi} = \overline{w} - \overline{w}_{\|\overline{n}} = (1,2,0) + \frac{1}{6}(1,-1,2) = \frac{1}{6}(7,11,2)$

Alt 2: Vi använder Gram-Schmidt för att bestämma en ON-bas till π. ②

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{|\bar{u}_1|}\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$



$$\bar{v}_2 = \bar{u}_2 - (\bar{u}_2 \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 =$$
$$= (-2,0,1) - \left((-2,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) =$$
$$= (-2,0,1) - \frac{1}{2}(-2)(1,1,0) = (-1,1,1)$$
$$\bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$$

$$\bar{W}_{\parallel\pi} = (\bar{W}\cdot\bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{W}\cdot\bar{e}_2)\bar{e}_2 = \qquad \text{(Ty } \bar{e}_1, \bar{e}_2 \text{ ON-bas till } \pi\text{!)}$$
$$= \left((1,2,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \left((1,2,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)\right)\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) =$$
$$= \ldots = \frac{1}{6}(7,11,2)$$

SVAR $(x_1,x_2,x_3) = s(1,1,0) + t(-2,0,1) \quad s,t \in \mathbb{R}$.

$$\bar{W}_{\parallel\pi} = \frac{1}{6}(7,11,2).$$

---

2) Lös ekvationen $AB^tX + C = D$ där

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad D = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Lösning: $AB^tX + C = D \iff (AB^t)X = D - C$

$$\iff \left(\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}\right)X = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{-3}{} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\end{array}\right) \underset{1/2}{} \sim \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0\end{array}\right)$$

SVAR: $X = \begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$

3) Låt $\mathbb{W} = [1+x^2, 1+x+x^3, 1-x^3] \subset \mathbb{P}_3$. (3)

Bestäm en bas till $\mathbb{W}$ samt utvidga vid behov till en bas till hela $\mathbb{P}_3$

Lösning:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbb{W} \iff \exists \lambda_1, \lambda_2 \lambda_3 \in \mathbb{R}$ s.a

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = \lambda_1(1+x^2) + \lambda_2(1+x+x^3) + \lambda_3(1-x^3)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_2 x + \lambda_1 x^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)x^3$$

$$\iff \begin{cases} a_0 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ a_1 = \lambda_2 \\ a_2 = \lambda_1 \\ a_3 = \lambda_2 - \lambda_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & -1 & a_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & a_0 - a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & a_3 - a_1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ \\ (-1) \end{array} \text{ + div radbyten}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 - a_3 \\ 0 & 1 & 1 & a_0 - a_2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-1) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 - a_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 - 2a_1 - a_2 + a_3 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (A) \\ \\ (B) \end{array}$$

(A): De tre översta raderna visar att det för varje a_0, a_1, a_2, a_3 finns högst en lösning $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, d.v.s vektorerna $1+x^2, 1+x+x^3, 1-x^3$ är linjärt oberoende $\Rightarrow$ bas till $\mathbb{W}$.

Vi noterar nu att (A) + (B) tillsammans säger att

$$\mathbb{W} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 : a_0 - 2a_1 - a_2 + a_3 = 0\}$$

För att utvidga till en bas till $\mathbb{P}_3$ väljer vi a_0, a_1, a_2, a_3 som ej ligger i $\mathbb{W}$, d.v.s. som ej uppfyller $a_0 - 2a_1 - a_2 + a_3 = 0$ (4)

T.ex $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

SVAR: $\{1+x^2, 1+x+x^3, 1-x^3\}$ bas till $\mathbb{W}$.

$\{1+x^2, 1+x+x^3, 1-x^3, 1\}$ bas till $\mathbb{P}_3$.

---

4) Låt $\mathbb{W} = [(1,1,0), (1,0,1), (4,2,2)] \subset \mathbb{R}^3$.

Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$ och fyll vid behov ut denna till en ON-bas till $\mathbb{R}^3$.

Bestäm koordinaterna för $\bar{u} = (1,1,1)$ i denna bas.

Bestäm även $\bar{u}_{\parallel \mathbb{W}} \in \mathbb{W}$, $\bar{u}_{\perp \mathbb{W}} \in \mathbb{W}^{\perp}$ s.a $\bar{u} = \bar{u}_{\parallel \mathbb{W}} + \bar{u}_{\perp \mathbb{W}}$.

Lösning: Vi kan köra Gram-Schmidt direkt.

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$$\bar{V}_2 = (1,0,1) - \left((1,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = (1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,-1,2)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{|\bar{V}_2|}\bar{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$$

$$\bar{V}_3 = (4,2,2) - \left((4,2,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \left((4,2,2)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right)\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)$$

$$= \ldots = (0,0,0). \quad \text{D.V.S.} \quad (4,2,2) \in [(1,1,0),(1,0,1)]$$

så $\mathbb{W} = [\bar{e}_1, \bar{e}_2]$, $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ ON-bas till $\mathbb{W}$.

För att bestämma $\bar{e}_3$ har vi nu två alternativ.

Alt 1: $\bar{e}_3 = \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \times \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) =$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}(2,-2,-2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$$

Alt 1 är dock specifikt för 3d, så vi ser även på ett till.

Alt 2: Välj en vektor $\bar{u}_3$ och fortsätt med Gram-Schmidt. Antingen kan man bara chansa på en vektor $\bar{u}_3$ och hoppas att den ej ligger i $\mathbb{W}$, eller så tar man fram en ekvation för $\mathbb{W}$ och väljer en som ej ligger i $\mathbb{W}$ (om $\bar{u}_3 \in \mathbb{W}$ får man ut vektorn $(0,0,0)$ som ovan och man får chansa igen...)

Vi chansar på att $\bar{u}_3 = (1,0,0) \notin \mathbb{W}$.

$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_{3\parallel\mathbb{W}} = \bar{u}_3 - (\bar{u}_3 \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 - (\bar{u}_3 \cdot \bar{e}_2)\bar{e}_2 =$$

$$= (1,0,0) - \left((1,0,0) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) - \left((1,0,0) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right)\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) =$$

$$= \ldots = \frac{1}{3}(1,-1,-1)$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{|\bar{v}_3|}\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$$

$$\bar{u} = \overbrace{(\bar{u} \cdot \bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{u} \cdot \bar{e}_2)\bar{e}_2}^{\bar{u}_{\parallel\mathbb{W}}} + \overbrace{(\bar{u} \cdot \bar{e}_3)\bar{e}_3}^{\bar{u}_{\perp\mathbb{W}}} = \qquad (\bar{u}_{\perp\mathbb{W}} = \bar{u}_{\parallel\mathbb{W}^\perp})$$

$$= \left((1,1,1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\right)\tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \left((1,1,1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right)\tfrac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) +$$

$$+ \left((1,1,1) \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right)\tfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \ldots =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) = \underline{e}\begin{pmatrix}\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}(4,2,2)}_{\bar{u}_{\parallel\mathbb{W}}} + \underbrace{\frac{1}{3}(-1,1,1)}_{\bar{u}_{\perp\mathbb{W}}}$$

SVAR: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2)\right\}$ ON-bas till $\mathbb{W}$

$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)\right\}$ ON-bas till $\mathbb{R}^3$

$\bar{u}_{\parallel\mathbb{W}} = \frac{1}{3}(4,2,2)$, $\bar{u}_{\perp\mathbb{W}} = \frac{1}{3}(-1,1,1)$

$\bar{u}$:s koordinater $\begin{pmatrix}\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3}\end{pmatrix}$

5) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hitta minstakvadratlösningarna till $A\bar{x} = \bar{y}$.

Lösning:

Vi vill hitta $\bar{x}$ som minimerar $|A\bar{x} - \bar{y}|$

$\Leftrightarrow$ $\bar{x}$ löser

$$A^t A \bar{x} = A^t \bar{y}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 18 & 8 & 5 \\ 8 & 4 & 2 \end{array}\right) (-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{array}\right) (-4) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \leftarrow (1/2) \\ \leftarrow (1/4) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{array}\right)$$

SVAR: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$