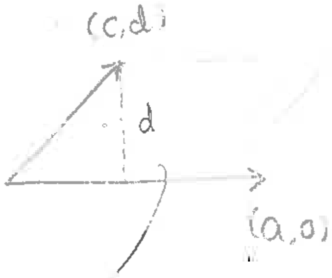
Exempel, Föreläsning 12

- 

Area = ad

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} = ad - 0c = ad$$

- $$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - 3\cdot 4 = -2.$$

- Om $n=3$ med $\bar{V}_1=(a_{11},a_{12},a_{13})$, $\bar{V}_2=(a_{21},a_{22},a_{23})$, $\bar{V}_3=(a_{31},a_{32},a_{33})$

så gäller

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \text{"}\begin{vmatrix} - \bar{V}_1 - \\ - \bar{V}_2 - \\ - \bar{V}_3 - \end{vmatrix}\text{"} = \bar{V}_1 \cdot (\bar{V}_2 \times \bar{V}_3).$$

D.v.s. determinanten är helt enkelt volymprodukten av radvektorerna.

Ex 1:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1(1\cdot 1 - 0\cdot 0) - 2(2\cdot 1 - 0\cdot 1) + 3(2\cdot 0 - 1\cdot 1) = 1-4-3 = \underline{\underline{-6}}.$$

$\det A \neq 0 \iff A$ är inverterbar ($n=2$-fallet)

- $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0 \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

inverterbar. Notera att $\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

om $ad-bc \neq 0$.

Om $ad-bc=0$ så gäller om $a \neq 0$ att

$d - \frac{c}{a} b = 0$, så tar vi och lägger till $-\frac{c}{a}$ ggr.

rad 1 till rad 2 skapar vi en nollrad...

- $\det A^t = \det A$ ($n=2$-fallet)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}.$$

$\det(AB) = \det A \det B$ ($n=2$-fallet)

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix}$$

$$= (ae+bg)(cf+dh) - (af+bh)(ce+dg)$$

$$= aedh + bgcf - afdg - bhce =$$

$$= (ad-bc)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}.$$

- Radoperationer ($n=2$-fallet)

- $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = kad - kbc = k(ad-bc) = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

- $\begin{vmatrix} a+rc & b+rd \\ c & d \end{vmatrix} = (a+rc)d - (b+rd)c = ad-bc + r(cd-dc) = ad-bc$

- $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = cb - da = -(ad-bc) = -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

Vi kan se determinanten som en funktion av radvektorerna

$$\det(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots \bar{v}_n) = \text{"}\begin{vmatrix} - \bar{v}_1 - \\ - \bar{v}_2 - \\ \vdots \\ - \bar{v}_n - \end{vmatrix}\text{"} \qquad (\bar{v}_i \in \mathbb{R}^n)$$

Som sådan kan man visa att determinanten är unikt bestämd av att

1) $\det(\bar{v}_1, \dots k\bar{v}_i, \dots \bar{v}_n) = k \det(\bar{v}_1, \dots \bar{v}_i, \dots \bar{v}_n)$

2) $\det(\bar{v}_1, \dots, \bar{u}+\bar{w}, \dots \bar{v}_n) = \det(\bar{v}_1, \dots, \bar{u}, \dots, \bar{v}_n) + \det(\bar{v}_1, \dots, \bar{w}, \dots \bar{v}_n)$

3) $\det(\bar{v}_1, \dots \bar{v}_i, \dots, \bar{v}_j, \dots, \bar{v}_n) = -\det(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j, \dots \bar{v}_i, \dots \bar{v}_n)$

4) $\det(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n) = 1$ där $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots \bar{e}_n)$ är standardbasen till $\mathbb{R}^n$.

Ex 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; (-2) \; (-1) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; (-2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; (1/6)$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \; (2) \; (-1) = 6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{-6}}.$$

<u>OBS!</u> Kom ihåg att om A är en $n \times n$-matris så gäller att $AX = \bar{0}$ har entydig lösning $\Leftrightarrow$ A^{-1} existerar $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Ex 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\left(1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}\right) = -(-1-3) = \underline{\underline{4}}$$

($\neq 0$ så speciellt inverterbar matris).

Alt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \ldots$$

Alt:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{\underline{4}}.$$

Men oftast är en kombination av radoperationer + radexpansion snabbast!