Exempel m.m. Föreläsning 13:

- $F(\bar{0}) = F(\bar{0}+\bar{0}) = F(\bar{0}) + F(\bar{0}) \Rightarrow F(\bar{0}) = \bar{0}$.

- $(F+G)(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}+\bar{v}) + G(\bar{u}+\bar{v}) = (F(\bar{u}) + F(\bar{v})) + (G(\bar{u}) + G(\bar{v})) =$

  $= (F(\bar{u}) + G(\bar{u})) + (F(\bar{v}) + G(\bar{v})) = (F+G)(\bar{u}) + (F+G)(\bar{v})$.

- $(F+G)(k\bar{u})$ behandlas på motsvarande sätt, likaså för kF...

  Så mängden av linjära avbildningar utgör ett vektorrum.

- Om $\lambda \in \mathbb{R}$ är fixt så är avbildningen $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ given av

  $F(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$

  linjär. (kallas ofta skalning).

Ex1: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ via $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ är ej linjär ty $F(kx_1, kx_2) = k^2 x_1 x_2$ ...

Ex2: Om $\mathbb{W}$ är ett delrum till ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$, och vi definierar $F: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ via

$F(\bar{v}) = \bar{v}_{\|\mathbb{W}}$,

då är F linjär. (kallad ortogonala projektionen på $\mathbb{W}$).

För att se detta notera vi att $\bar{v}_{\|\mathbb{W}}$ är unikt bestämt av att $\bar{v}_{\|\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$ och $\bar{v} - \bar{v}_{\|\mathbb{W}} \in \mathbb{W}^\perp$

Men vi vet att $\mathbb{W}$ och $\mathbb{W}^\perp$ är delrum till $\mathbb{E}$, så

$\bar{u}_{\|\mathbb{W}} + \bar{v}_{\|\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$, $(\bar{u} - \bar{u}_{\|\mathbb{W}}) + (\bar{v} - \bar{v}_{\|\mathbb{W}}) = (\bar{u}+\bar{v}) - (\bar{u}_{\|\mathbb{W}} + \bar{v}_{\|\mathbb{W}}) \in \mathbb{W}^\perp$

Alltså gäller $(\bar{u}+\bar{v})_{\|\mathbb{W}} = \bar{u}_{\|\mathbb{W}} + \bar{v}_{\|\mathbb{W}}$.

P.s.s. $k\bar{v}_{\|\mathbb{W}} \in \mathbb{W}$, $k\bar{v} - k\bar{v}_{\|\mathbb{W}} = k(\bar{v} - \bar{v}_{\|\mathbb{W}}) \in \mathbb{W}^\perp$ så

$(k\bar{v})_{\|\mathbb{W}} = k\bar{v}_{\|\mathbb{W}}$.

Ex 3: Om A är en $r \times k$-matris och vi definierar

$$F: \mathbb{M}_{k\times 1} \to \mathbb{M}_{r\times 1} \quad \text{via}$$

$$F(X) = AX \quad \text{(vanlig matrismultiplikation)},$$

då är enligt lagarna för matrismultiplikation F linjär:
$F(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = F(X) + F(Y)$. $F(kX) = A(kX) = kAX = kF(X)$.

T. ex. $F: \mathbb{M}_{2\times 1} \to \mathbb{M}_{2\times 1}$ via

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix} \quad \text{är linjär.}$$

Vi ska snart se att <u>alla</u> linjära avbildningar från $\mathbb{M}_{k\times 1}$ till $\mathbb{M}_{r\times 1}$ ges av matrismultiplikation med en unikt bestämd $r \times k$-matris A.

Detta gäller i viss mening även mer allmänt, för om vi har en linjär avbildning $F: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ och vi väljer baser $\underline{u}$ till $\mathbb{U}$ respektive $\underline{v}$ till $\mathbb{V}$, då kan varje vektor $\bar{u} \in \mathbb{U}$ enl tidigare skrivas på formen $\bar{u} = \underline{u}X$, och $F(\bar{u}) = \underline{v}Y$ för unikt bestämt Y.
Det kommer då finnas unik matris A sådan att $Y = AX$ för varje koordinatmatris X:

Bevis (fallet $k=3,\ r=2$): , $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$F(\bar{u}) = F(\underline{u}X) = F(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + x_3\bar{u}_3) =$$

$$= x_1 F(\bar{u}_1) + x_2 F(\bar{u}_2) + x_3 F(\bar{u}_3) = \Big/ F(\bar{u}_i) = \underline{v}\, Y_i = \underline{v}\begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \end{pmatrix} \Big/$$

$$= x_1(y_{11}\bar{v}_1 + y_{12}\bar{v}_2) + x_2(y_{21}\bar{v}_1 + y_{22}\bar{v}_2) + x_3(y_{31}\bar{v}_1 + y_{32}\bar{v}_2) =$$

$$\bar{v}_1(y_{11}x_1 + y_{21}x_2 + y_{31}x_3) + \bar{v}_2(y_{12}x_1 + y_{22}x_2 + y_{32}x_3) =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11} & y_{21} & y_{31} \\ y_{12} & y_{22} & y_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{matrix}$$

Ex 4: $I : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ med standardbasen:

$I(\bar{e}_i) = \bar{e}_i$ ger att vi har matrisframställningen

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ex 5: $I : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ då $\mathbb{U} = \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$ men vi väljer baser

$\underline{u} = ((1,1,0)\ (1,0,1)\ (0,1,0))$, $\underline{v} = \underline{e}$ = standardbasen.

Nu gäller

$$I(\bar{u}_1) = (1,1,0) = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I(\bar{u}_2) = \bar{u}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad I(\bar{u}_3) = \bar{u}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Så vi får matrisrepresentation

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

OBS! $\bar{u}_1 = \underline{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_2 = \underline{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \bar{u}_3 = \underline{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ex6: $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via $F(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ (standardbasen)

$$F(1,0) = (\lambda, 0) = \underline{e}\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \qquad F(0,1) = (0,\lambda) = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Så $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex7: $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projektion på x_1x_2-planet (standardbasen)

$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ så

$$F(1,0,0) = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad F(0,1,0) = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F(0,0,1) = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Så $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

OBS! $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

D.v.s. $F\left(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.