Föreläsning 15:

$F: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ linjär, d.v.s

- $F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v})$
- $F(\lambda\bar{u}) = \lambda F(\bar{u})$,

och om $\underline{u}, \underline{v}$ är baser till $\mathbb{U}$ respektive $\mathbb{V}$ så finns unik matris A s.a.

$$F(\underline{u}X) = \underline{v}AX \quad \text{för alla } X.$$

Def:

$N(F) = \{\bar{u} \in \mathbb{U} : F(\bar{u}) = \bar{0}\} \subset \mathbb{U}$ (nollrummet till F)

$V(F) = \{F(\bar{u}) : \bar{u} \in \mathbb{U}\} \subset \mathbb{V}$ (värderummet till F).

N(F) delrum till $\mathbb{U}$:

$\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in N(F) \Rightarrow F(\bar{u}_1+\bar{u}_2) = F(\bar{u}_1)+F(\bar{u}_2) = \bar{0}+\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{u}_1+\bar{u}_2 \in N(F)$

$\bar{u} \in N(F), \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\lambda\bar{u}) = \lambda F(\bar{u}) = \lambda\bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \lambda\bar{u} \in N(F)$.

V(F) delrum till $\mathbb{V}$:

$\bar{a}, \bar{b} \in V(F) \Leftrightarrow \bar{a} = F(\bar{u}), \bar{b} = F(\bar{v})$ för några $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{U} \Rightarrow$

$\bar{a}+\bar{b} = F(\bar{u}) + F(\bar{v}) = F(\bar{u}+\bar{v})$, så $\bar{a}+\bar{b} \in V(F)$.

P.s.s. $\lambda\bar{a} = \lambda F(\bar{u}) = F(\lambda\bar{u})$, så $\lambda\bar{a} \in V(F)$.

Alt: ($\mathbb{U}, \mathbb{V}$ ändligdim): $\underline{u}, \underline{v}$ baser till $\mathbb{U}, \mathbb{V}$.

$$F\left(\underline{u}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}\right) = \underline{v}A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} = \underline{v}\begin{pmatrix}| & | & & |\\Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n\\| & | & & |\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} =$$

$$= x_1\underline{v}Y_1 + x_2\underline{v}Y_2 + \dots + x_n\underline{v}Y_n$$

Så $V(F) = [\underline{v}Y_1, \underline{v}Y_2, \dots, \underline{v}Y_n]$. $N(F)$ ges av

$$\left\{\underline{u}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} : A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

V.S.B

Ex1: Om $\mathbb{W}$ är ett delrum till ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$ och vi definierar $F: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ via

$F(\bar{u}) = \bar{u}_{\parallel \mathbb{W}}$. då gäller att

$F(\bar{u}) = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{u}_{\parallel \mathbb{W}} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{u} \in \mathbb{W}^{\perp}$.

Så $\underline{\underline{N(F) = \mathbb{W}^{\perp}}}$.

Givetvis gäller $V(F) \subset \mathbb{W}$ och för alla $\bar{v} \in \mathbb{W}$ gäller $F(\bar{v}) = \bar{v}$, så $\underline{\underline{V(F) = \mathbb{W}}}$.

Ex2: För sträckning ($F(\bar{u}) = \lambda \bar{u}$), vridning respektive spegling $F: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ gäller att $N(F) = \{\bar{0}\}$, $V(F) = \mathbb{E}$.

Sats: $\mathbb{U} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m] \Rightarrow V(F) = [F(\bar{u}_1), F(\bar{u}_2), \dots, F(\bar{u}_m)]$.

Bevis: Givetvis gäller $[F(\bar{u}_1), F(\bar{u}_2), \dots, F(\bar{u}_m)] \subset V(F)$.

Men om $\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}_1 + \lambda_2 \bar{u}_2 + \dots + \lambda_m \bar{u}_m$ så gäller att

$F(\bar{u}) = \lambda_1 F(\bar{u}_1) + \lambda_2 F(\bar{u}_2) + \dots + \lambda_m F(\bar{u}_m) \in [F(\bar{u}_1), F(\bar{u}_2), \dots, F(\bar{u}_m)]$.

V.S.B

---

3) Avbildningen $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ har (i standardbasen) matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Bestäm baser till F:s nollrum och värderum. Samt skriv V(F) som ett lösningsrum

Ex 3:

Eftersom

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$$ så gäller att

$$V(F) = [(1,1,0), (2,0,1), (3,1,1)] = \left\{(y_1,y_2,y_3) : \text{finns } (x_1,x_2,x_3) \text{ s.a. } A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}\right\}$$

Vi ställer upp beroendeekvationen

$$\left(\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&0&y_1\\1&0&1&0&y_2\\0&1&1&0&y_3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&0&y_2\\0&2&2&0&y_1-y_2\\0&1&1&0&y_3\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&1&0&y_2\\0&1&1&0&y_3\\0&0&0&0&y_1-y_2-2y_3\end{array}\right)$$

Detta ger att $((1,1,0)\ (2,0,1))$ är en bas till $V(F)$! Notera också att den ekvation vi löser är

$$x_1(1,1,0) + x_2(2,0,1) + x_3(3,1,1) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Lösningarna är nu $\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3) = t(-1,-1,1)$.

Så $(-1,-1,1)$ är en bas till $N(F)$.

(OBS! $\dim V(F) + \dim N(F) = 3$.)

$V(F) = [(1,1,0),(2,0,1)] = \{(y_1,y_2,y_3) : y_1 - y_2 - 2y_3 = 0\}$.

$N(F) = [(-1,-1,1)]$

Dimensionssatsen: $F: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ linjär $\Rightarrow$

$\dim N(F) + \dim V(F) = \dim \mathbb{U}$.

Bevis (fallet $\dim \mathbb{U} = 2$, $\dim N(F) = 1$):

Finns då bas $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ till $\mathbb{U}$ sådan att $N(F) = [\bar{u}_1]$.

Vi vet att $V(F) = [F(\bar{u}_1), F(\bar{u}_2)]$, men då $F(\bar{u}_1) = \bar{0}$ gäller att $V(F) = [F(\bar{u}_2)]$ och enligt antagande gäller $F(\bar{u}_2) \neq \bar{0}$, så $\dim V(F) = 1$. V.S.B

Sammansatta avbildningar: $F: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$, $G: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ linjära $\Rightarrow$ $G \circ F: \mathbb{U} \to \mathbb{W}$ definierad av

$$G \circ F(\bar{u}) = G(F(\bar{u}))$$ är också linjär.

För att se detta:

$$G \circ F(\bar{u} + \bar{v}) = G(F(\bar{u} + \bar{v})) = G(F(\bar{u}) + F(\bar{v})) = G(F(\bar{u})) + G(F(\bar{v})) =$$
$$= G \circ F(\bar{u}) + G \circ F(\bar{v}).$$

$$G \circ F(\lambda \bar{u}) = G(F(\lambda \bar{u})) = G(\lambda F(\bar{u})) = \lambda G(F(\bar{u})) = \lambda\, G \circ F(\bar{u}).$$

Vidare om i valt baser $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ och $F(\underline{u}X) = \underline{v}AX$, $G(\underline{v}Y) = \underline{w}BY$

$$G \circ F(\underline{u}X) = G(F(\underline{u}X)) = G(\underline{v}AX) = \underline{w}B(AX) = \underline{w}(BA)X$$

så $G \circ F$ har matris BA.

Ex 4) $G: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ via $G(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 = \underline{e}\,(1\ 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via $F(x_1, x_2) = (x_2, 2x_1) = \underline{e}\begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$G \circ F(x_1, x_2) = G(F(x_1, x_2)) = G(x_2, 2x_1) = x_2 + 4x_1 = \underline{e}\,(4\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$(1\ 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = (4\ 1).$

Def: Om $F: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ är linjär och det finns en linjär avbildning $F^{-1}: \mathbb{V} \to \mathbb{U}$ s.a.

- $F(F^{-1}(\bar{v})) = \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{V}$
- $F^{-1}(F(\bar{u})) = \bar{u} \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{U}$

då sägs F vara inverterbar med invers F^{-1}.

Sats: Om $\underline{u}, \underline{v}$ är baser till $\mathbb{U}$ resp. $\mathbb{V}$ och F har matris A i dessa, då är F inverterbar omm A är inverterbar och F^{-1} har då matris A^{-1} i dessa baser.

Bevis: F är inverterbar omm för varje $\bar{v} \in \mathbb{V}$ finns exakt ett $\bar{u} \in \mathbb{U}$ s.a. $F(\bar{u}) = \bar{v}$. D.v.s. omm för alla Y så finns exakt ett X s.a.

$F(\underline{u}X) = \underline{v}AX = \underline{v}Y$. Men vi vet att $AX = Y$ har entydig lösning för alla Y omm A är kvadratisk och inverterbar.

Om A^{-1} existerar gäller med $G(\underline{v}Y) = \underline{u}A^{-1}Y$ att

$G(F(\underline{u}X)) = G(\underline{v}AX) = \underline{u}A^{-1}(AX) = \underline{u}X$, så $G = F^{-1}$. $\square$

Ex5) Avgör om $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är inverterbar och bestäm i så fall F^{-1} om

$$F(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + 4x_2).$$

Lösning:

$$F\left(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{e}\begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 4x_2 \end{pmatrix} = \underline{e}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$\det A = 8 - 1 = 7 \neq 0$ så A^{-1} existerar.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) -2 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & 1 & -2 \end{array}\right) -1/7 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right) -4$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4/7 & -1/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 2/7 \end{array}\right) \qquad \text{så} \quad A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F^{-1}\left(\underline{e}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \underline{e}\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \underline{e}\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4y_1 - y_2 \\ -y_1 + 2y_2 \end{pmatrix}$$

D.v.s.

$$F^{-1}(y_1, y_2) = \frac{1}{7}(4y_1 - y_2,\ -y_1 + 2y_2)$$

Kontroll: $F^{-1}(F(x_1, x_2)) = F^{-1}(\overbrace{2x_1 + x_2}^{y_1},\ \overbrace{x_1 + 4x_2}^{y_2}) =$

$$= \frac{1}{7}\left(4(2x_1 + x_2) - (x_1 + 4x_2),\ -(2x_1 + x_2) + 2(x_1 + 4x_2)\right) =$$

$$= \frac{1}{7}(7x_1, 7x_2) = (x_1, x_2) \qquad \text{o.k.}$$

Ex6) Låt $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ via $F(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, x_1 - x_2)$.
Bestäm baser till $N(F)$ och $V(F)$ samt avgör om F är inverterbar.

Lösning

$F(x_1,x_2) = (0,0) \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, så

$N(F) = [(1,1)]$.

$V(F) = \{(x_1 - x_2, x_1 - x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} =$

$= \{(x_1 - x_2)(1,1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = [(1,1)]$.

Vi har alltså $N(F) = V(F)$, ($\dim N(F) + \dim V(F) = 1+1 = 2$).

Eftersom $N(F) \neq \{\bar{0}\}$ är F ej inverterbar.