Föreläsning 16:

Repetition:

$F: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ linjär om

- $F(\bar{u}+\bar{v}) = F(\bar{u}) + F(\bar{v})$
- $F(k\bar{u}) = kF(\bar{u})$.

Ex 1: Avgör om $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ via

a) $F(x_1,x_2) = 2x_1 + 3x_2$

b) $F(x_1,x_2) = x_1x_2$

är linjär.

Lösning:

a)

$$F((x_1,x_2)+(y_1,y_2)) = F((x_1+y_1, x_2+y_2)) = 2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2)$$

$$= (2x_1+3x_2) + (2y_1+3y_2) = F(x_1,x_2) + F(y_1,y_2)$$

$$F(k(x_1,x_2)) = F(kx_1, kx_2) = 2(kx_1) + 3(kx_2) = k(2x_1+3x_2)$$

$= kF(x_1,x_2)$ så F är linjär.

OBS! $F(x_1,x_2) = 2x_1+3x_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

b) $F(k(x_1,x_2)) = F(kx_1,kx_2) = (kx_1)(kx_2) = k^2x_1x_2 \neq kx_1x_2$

$= kF(x_1,x_2)$ för $k \neq 0,1$, $x_1x_2 \neq 0$.

Så F är ej linjär.

Om vi valt baser $\underline{u} = (\bar{u}_1 \cdots \bar{u}_k)$ till $\mathbb{U}$ och $\underline{v} = (\bar{v}_1 \cdots \bar{v}_r)$ till $\mathbb{V}$ då finns unik $r\times k$-matris A s.a.

$$F(\underline{u}X) = \underline{v}AX \quad \forall X \in \mathbb{M}_{k\times 1}.$$

Ex 2: Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ vara given av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, x_2 + x_3).$$

Låt $\underline{u} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3) = ((1,0,1)\ (1,1,0)\ (0,0,1))$ vara bas till $\mathbb{R}^3$ och $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2) = ((0,1)\ (1,0))$ bas till $\mathbb{R}^2$

Bestäm F:s matris A i baserna $\underline{u}, \underline{v}$.

Lösning:

$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \quad \text{där} \quad F(\bar{u}_i) = \underline{v}\, Y_i = \underline{v}\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$$

$$F(\bar{u}_1) = F(1,0,1) = (1,1) = \underline{v}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 = a_1(0,1) + b_1(1,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_1 = b_1 = 1.$$

$$F(\bar{u}_2) = F(1,1,0) = (2,1) = \underline{v}\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_2(0,1) + b_2(1,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2 = 1,\ b_2 = 2$$

$$F(\bar{u}_3) = F(0,0,1) = (0,1) = \underline{v}\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_3(0,1) + b_3(1,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_3 = 1,\ b_3 = 0.$$

Så

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definition: Om $\mathbb{E}$ är ett Euklidiskt rum och $F: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ är linjär och sådan att

$$|F(\bar{u})| = |\bar{u}| \quad \forall\, \bar{u} \in \mathbb{E},$$

då kallas F för en linjär isometri

Sats: Låt $\underline{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_n)$ vara en ON-bas till $\mathbb{E}$.
För en linjär avbildning $F: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ är följande ekvivalent:

(a) F är en isometri,

(b) $(F(\bar{u}) \mid F(\bar{v})) = (\bar{u} \mid \bar{v})$ för alla $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{E}$,

(c) $(F(\bar{e}_1), F(\bar{e}_2) \cdots F(\bar{e}_n))$ är en ON-bas till $\mathbb{E}$,

(d) F:s matris A i basen $\underline{e}$ är ortonormal, d.v.s. $A^t A = I$

Bevis:

(a) $\Rightarrow$ (b): $|F(\bar{u}+\bar{v})|^2 = |\bar{u}+\bar{v}|^2 = (\bar{u}+\bar{v}|\bar{u}+\bar{v}) =$

$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2(\bar{u}|\bar{v})$ Eftersom $|F(\bar{u})|^2 = |\bar{u}|^2$

och $|F(\bar{v})|^2 = |\bar{v}|^2$ får vi

$$|F(\bar{u}+\bar{v})|^2 = |F(\bar{u})+F(\bar{v})|^2 = (F(\bar{u})+F(\bar{v})|F(\bar{u})+F(\bar{v})) =$$

$$= |F(\bar{u})|^2 + |F(\bar{v})|^2 + 2(F(\bar{u})|F(\bar{v})) =$$

$$= |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2(F(\bar{u})|F(\bar{v})) = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2(\bar{u}|\bar{v}).$$

(b) $\Rightarrow$ (c):

$$(F(\bar{e}_i)|F(\bar{e}_j)) = (\bar{e}_i|\bar{e}_j) = \begin{cases} 1 & \text{om } i=j \\ 0 & \text{om } i\neq j. \end{cases}$$

(c) $\Rightarrow$ (d): $F(\bar{e}_i) = \underline{e}\,Y_i$ och eftersom $\underline{e}$ är ON-bas

gäller $(\underline{e}X|\underline{e}Y) = X^tY$, så

$$(F(\bar{e}_i)|F(\bar{e}_j)) = Y_i^tY_j, \quad \text{så}$$

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ Y_1 & \cdots & Y_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad \text{uppfyller}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix} - & Y_1^t & - \\ & \vdots & \\ - & Y_n^t & - \end{pmatrix}\begin{pmatrix} | & & | \\ Y_1 & \cdots & Y_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1^tY_1 & \cdots & Y_1^tY_n \\ \vdots & & \\ Y_n^tY_1 & \cdots & Y_n^tY_n \end{pmatrix} =$$

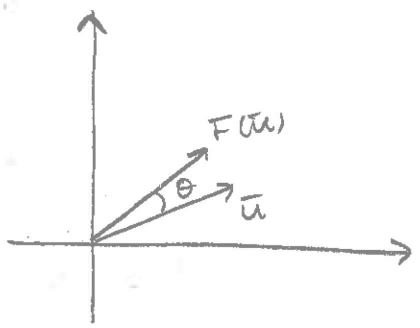
$$= I.$$

(d) $\Rightarrow$ (a): $|F(\bar{u})|^2 = (F(\underline{e}X)|F(\underline{e}X)) =$

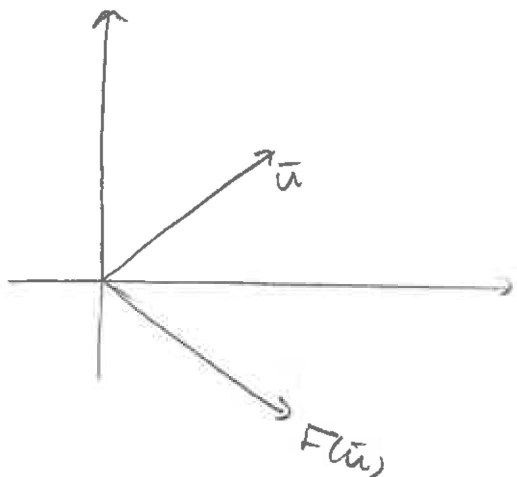
$$= (\underline{e}AX|\underline{e}AX) = (AX)^tAX = X^t\underbrace{A^tA}_{=I}X = X^tX = (\underline{e}X|\underline{e}X) = |\bar{u}|^2.$$

$\square$

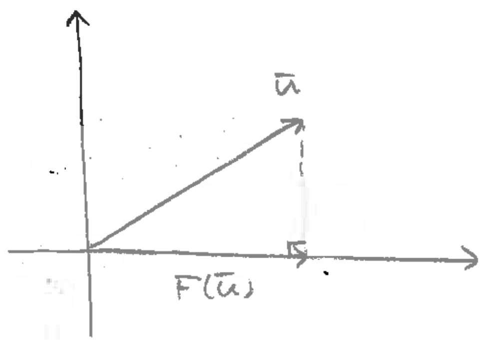
Ex 3: Låt $\mathbb{E} = \mathbb{R}^2$.



Vridning är en isometri



Spegling är en isometri.



Projektion på linje ej isometri.

Det visar sig att på $\mathbb{R}^2$ är de enda isometrierna vridningar och speglingar.

- Notera att om F, G ä isometrier, då är även $F \circ G$ en isometri ty

$$|F(G(\bar{u}))| = |G(\bar{u})| = |\bar{u}|.$$

- Om $A^t A = I$ gäller $\det(A^t A) = \det A^t \det A =$
$= (\det A)^2 = 1$, så $\det A = \pm 1$.

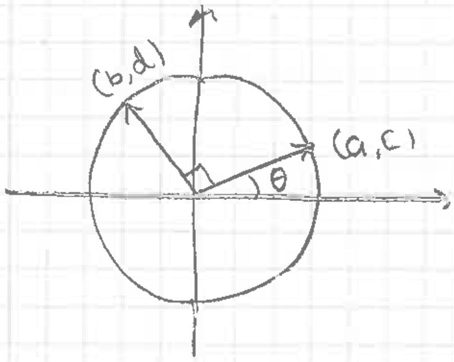
Sats:
(a) Om $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är en linjär isometri med matris A i standardbasen, då är F en vridning om $\det A = 1$, och en spegling om $\det A = -1$.

(b) Om $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en linjär isometri med matris A i standardbasen, då är F en vridning om $\det A = 1$. Om $\det A = -1$ då är F antingen en spegling eller en sammansättning mellan en vridning och en spegling.

⑥ Bevis av (a):

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A^tA = I$.

Vi vet att (a,c), (b,d) är en ON-bas till $\mathbb{R}^2$, så speciellt längd 1 och vinkel $\pi/2$ mellan dem. Det finns alltså θ s.a. $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, ty (a,c) ligger på enhetscirkeln. Vi får nu två alternativ:



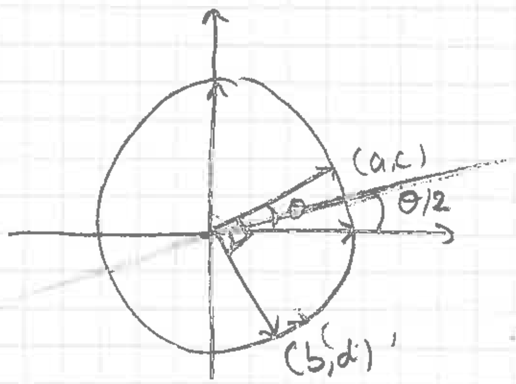
$b = \cos(\theta + \pi/2) = -\sin\theta$

$d = \sin(\theta+\pi/2) = \cos\theta$, så

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det A = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

och vi vet att detta är en vridning med vinkel θ.



$b = \cos(\theta - \pi/2) = \sin\theta$

$d = \sin(\theta - \pi/2) = -\cos\theta$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\det A = -1$.

Vi har att

$$A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\theta\\ -\cos\theta\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Spegling genom linje med vinkel $\theta/2$.

7

Ex: Visa att $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ som i standardbasen har matris

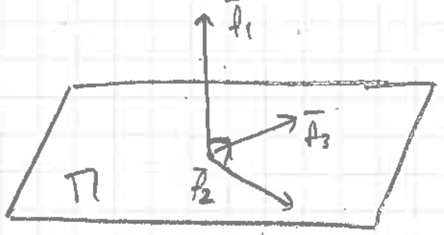
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

är en isometri och "beskriv" den

Lösning:

Vi ser lätt att $A^t A = I$, så F ä en isometri.

det $A = -1$. När detta ä fallet och F är en isometri då vet vi att det finns ett plan Π som vektoren speglas igenom, och eventuellt att vi även har en vridning "i" detta plan.



Det finns alltid vektor $\bar{f}_1$ s.a. $F(\bar{f}_1) = -\bar{f}_1$.

$\bar{f}_1 = (a, b, c)$: $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \sqrt{2}+\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+\sqrt{2} & 0 \end{array} \right) \cdots \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -(1+\sqrt{2})t \\ c = t \end{cases} \quad \bar{f}_1 = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1+\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

t-ex.

Låt nu $\bar{f}_2 = (1, 0, 0)$, $\bar{f}_3 = (0, 1, 1+\sqrt{2})$

$\bar{f}_i \cdot \bar{f}_j = 0 \quad i \neq j$.

8 Eftersom $F(\bar{f}_2) = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$F(\bar{f}_3) = \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix} = \dots = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\1+\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

gäller att F endast är en spegling genom planet $\Pi = [\bar{f}_2, \bar{f}_3]$.

Symmetriska avbildningar:

$F: E \to E$ linjär kallas symmetrisk om
$(F(\bar{u})|\bar{v}) = (\bar{u}|F(\bar{v})) \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in E$.

Sats: Om $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ är en ON-bas till E, $F: E \to E$ är linjär med matris A i denna bas. Då gäller att

F symmetrisk $\iff$ A symmetrisk $(A^t = A)$.

Bevis:

$(F(\bar{u})|\bar{v}) = (F(\underline{e}X)|\underline{e}Y) = (\underline{e}AX|\underline{e}Y) = (AX)^tY =$
$= X^tA^tY = (\underline{e}X|\underline{e}A^tY)$

Och vi ser lätt att detta $= (\underline{e}X|\underline{e}AY) = (\bar{u}|F(\bar{v}))$ om och endast om $A^t = A$. $\square$

$$\left(\left(\underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \middle| \underline{e}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right) = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 = (1\ 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right).$$