Föreläsning 17:

Låt $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ t.ex. och låt $\underline{u} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2)$ resp. $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2)$ vara två baser till $\mathbb{R}^2$.

Varje vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$ kan då entydigt skrivas på formen

$$\bar{x} = \underline{u}X \quad \text{respektive} \quad \bar{x} = \underline{v}Y.$$

Vi vill nu veta förhållandet mellan X och Y.

Notera att vi har

$$\bar{v}_1 = c_{11}\bar{u}_1 + c_{21}\bar{u}_2 = \underline{u}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2 = c_{12}\bar{u}_1 + c_{22}\bar{u}_2 = \underline{u}\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix} \quad \text{för vissa tal } c_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Så om $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ då gäller att

$$\bar{x} = y_1\bar{v}_1 + y_2\bar{v}_2 = y_1\left(\underline{u}\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}\right) + y_2\left(\underline{u}\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \underline{u}\left(y_1\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{pmatrix}\right) = \underline{u}\underbrace{\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}}_{T}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

D.v.s. $X = TY$.

T kallas övergångsmatrisen från $\underline{v}$- till $\underline{u}$-basen.

Det är ett bra sätt att komma ihåg formeln att $\underline{v} = \underline{u}T$.

Då kan ovanstående räkning skrivas (formellt)

$$\underline{v}Y = (\underline{u}T)Y = \underline{u}TY = \underline{u}X \iff X = TY.$$

Mer allmänt har vi följande: ②

Om $\underline{u} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_n)$, $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \cdots \bar{v}_n)$ är baser till $\mathbb{V}$

och $\bar{v}_i = \underline{u}\,Y_i$.

Om vi inför övergångsmatrisen (transformationsmatrisen) från $\underline{v}$- till $\underline{u}$-basen

$$T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \qquad (\text{formellt } \underline{v} = \underline{u}T)$$

då gäller att

$$\underline{u}X = \underline{v}Y \Leftrightarrow X = TY.$$

Vidare gäller $\underline{v} = \underline{u}T \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{v}T^{-1}$.

Ex1: Låt $\underline{e}$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^3$

och $\underline{f} = ((1,1,0)\ (1,0,1)\ (1,0,0))$.

Bestäm övergångsmatrisen från $\underline{e}$- till $\underline{f}$-basen och

från $\underline{f}$- till $\underline{e}$-basen.

Bestäm även koordinaterna till vektorn $\bar{u} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ i $\underline{f}$-basen,

$\bar{v} = \underline{f}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ i $\underline{e}$-basen.

Lösning: Vi har

$$\bar{f}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \bar{f}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \quad \bar{f}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

så $\underline{f} = \underline{e}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}}_{T}$. D.v.s. T är övergångsmatrisen

från $\underline{f}$- till $\underline{e}$-basen.

$$\bar{v} = \underline{f}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\,T\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \underline{e}\underline{\underline{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}}}$$

$\underline{e} = \underline{f}\,T^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \begin{matrix}-1\\ \\-1\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}0&0&1&1&-1&-1\\1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right)$$

D.v.s. $T^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$.

$$\bar{u} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{f}\,T^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{f}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \underline{f}\underline{\underline{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}}.$$

4

$\boxed{\text{Sats: } \underline{u}, \underline{v} \text{ ON-baser till } \mathbb{E},\ \underline{v} = \underline{u}T \Rightarrow T^tT = I}$

Bevis
Notera att $T = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Y_1 & Y_2 & \cdot & Y_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ där $\bar{v}_i = \underline{u} Y_i$.

Eftersom $\underline{u}$ är en ON-bas så vet vi att

$$(\bar{v}_i | \bar{v}_j) = (\underline{u} Y_i | \underline{u} Y_j) = Y_i^t Y_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Men
$$T^tT = \begin{pmatrix} - Y_1^t - \\ - Y_2^t - \\ \\ - Y_n^t - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Y_1 & Y_2 & & Y_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} Y_1^t Y_1 & Y_1^t Y_2 & \cdot & Y_1^t Y_n \\ \vdots & & & \\ Y_n^t Y_1 & Y_n^t Y_2 & & Y_n^t Y_n \end{pmatrix} = I.$$

OBS! Notera att om $\underline{e}, \underline{f}, \underline{g}$ är baser till $\mathbb{V}$ där

$\underline{f} = \underline{e}T_1$, $\underline{g} = \underline{f}T_2$, då gäller $\underline{g} = \underline{e}T_1T_2$.

Ex 2: Låt $\underline{f} = ((1,1)\ (2,1))$, $\underline{g} = ((0,2)\ (1,2))$ vara baser till $\mathbb{R}^2$. Bestäm övergångsmatrisen från $\underline{g}$ till $\underline{f}$-basen.

Lösning: Med standardbasen $\underline{e}$ gäller

$$\underline{f} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{g} = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi vill ha $\underline{g} = \underline{f}T$. $\underline{g} = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \underline{f}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} =$

$$= \underline{f}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \underline{f}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Om $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ har matris $A_{\underline{e}}$ respektive $A_{\underline{f}}$ i baserna $\underline{e}, \underline{f}$ till $\mathbb{V}$ och $\underline{f} = \underline{e}T$ då gäller att

$$F(\underline{e}X_e) = \underline{e}A_eX_e = \cdot \,/\, \underline{e} = \underline{f}T^{-1},\ X_e = TX_f \,/ =$$

$$= \underline{f}T^{-1}A_eTX_f = \underline{f}A_fX_f \quad \text{för alla } X_f.$$

D.v.s. $$\boxed{A_f = T^{-1}A_eT}$$

OBS! $\det A_f = \det(T^{-1}A_eT) = \det(T^{-1})\det A_e \det T = \det A_e.$

Ex 3: Antag att $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har matris

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i standardbasen } \underline{e}.$$

Låt $\underline{f} = ((1,1)\ (0,1))$. Bestäm F:s matris A_f i $\underline{f}$.

Lösning: $\underline{f} = \underline{e}T$ där

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ger nu}$$

$$F(\underline{e}X_e) = \underline{e}A_eX_e = /\, X_e = TX_f,\ \underline{e} = \underline{f}T^{-1} \,/ = (\underline{f}T^{-1})A_e(TX_f)$$

$$= \underline{f}\,\underbrace{(T^{-1}A_eT)}_{A_f}X_f.$$

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

Test:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

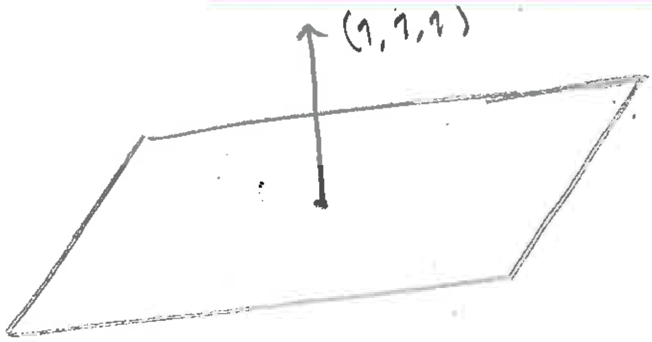
$3(1,1) + 1(1,0) = (3,4)$

D.v.s. $\underline{f}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ex 4: Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vara spegling genom planet $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Bestäm F:s matris i standardbasen $\underline{e}$.

Lösning: Vi noterar att $(1,1,1)$ är normal till planet och att $(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$ är en bas till $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.



Låt $\underline{f} = ((1,-1,0) \; (1,0,-1) \; (1,1,1))$.

$$F(\bar{f}_1) = \bar{f}_1 = \underline{f}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad F(\bar{f}_2) = \bar{f}_2 = \underline{f}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad F(\bar{f}_3) = -\bar{f}_3 = \underline{f}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Så $A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix}$.

$$\underline{f} = \underline{e}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\-1 & 0 & 1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} = \underline{e}T.$$

Vi beräknar T^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu gäller alltså

$$F(\underline{f}Y) = \underline{f}A_fY = \left/ \begin{array}{l} \underline{e}X = \underline{f}T^{-1}X = \underline{f}Y \Leftrightarrow Y = T^{-1}X \\ \underline{f} = \underline{e}T \end{array} \right/$$

$$= \underline{e}TA_fT^{-1}X$$

D.v.s. $A_e = TA_fT^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(OBS! A_e är ON-matris och $\det A_e = -1$.)