Föreläsning 19.

Antag att $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i någon bas $\underline{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ har matris

$$A_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ (Diagonal matris).

Då gäller att

$$F(\bar{v}_1) = F(\underline{v}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \underline{v} A_v \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underline{v}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \underline{v}\begin{pmatrix}\lambda_1\\0\end{pmatrix} = \lambda_1 \bar{v}_1$$

P.s.s.

$$F(\bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_2.$$

Givet en linjär avbildning $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ finns inte alltid en bas $\underline{v}$ s.a. A_v är diagonal, men enligt ovanstående ska vi leta efter vektorer $\bar{v}$ s.a. $F(\bar{v}) = \lambda \bar{v}$ för ngt. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Diagonala matriser är lätta att jobba med. T.ex.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}.$$

Dessutom är det relativt enkelt att förstå F om A_v är diagonal.

Notera ovan att omvänt om $F(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$ då gäller $A_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Def: En linjär avbildning $F: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ sägs ha ett egenvärde $\lambda \in \mathbb{R}$ med egenvektor $\bar{v} \neq \bar{0}$ om

$$F(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.$$

- Mängden $\{\bar{v} : F(\bar{v}) = \lambda \bar{v}\}$ kallas egenrummet till egenvärdet λ (OBS! innehåller $\bar{0}$...), och det är lätt att se att detta är ett delrum till $\mathbb{V}$.

Sats: Om det finns en bas $(\bar{v}_1, \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ till $\mathbb{V}$ bestående av egenvektorer till F med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ då har F diagonal matris

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$ i denna bas.

(OBS! λ_i:a behöver inte vara olika här!)

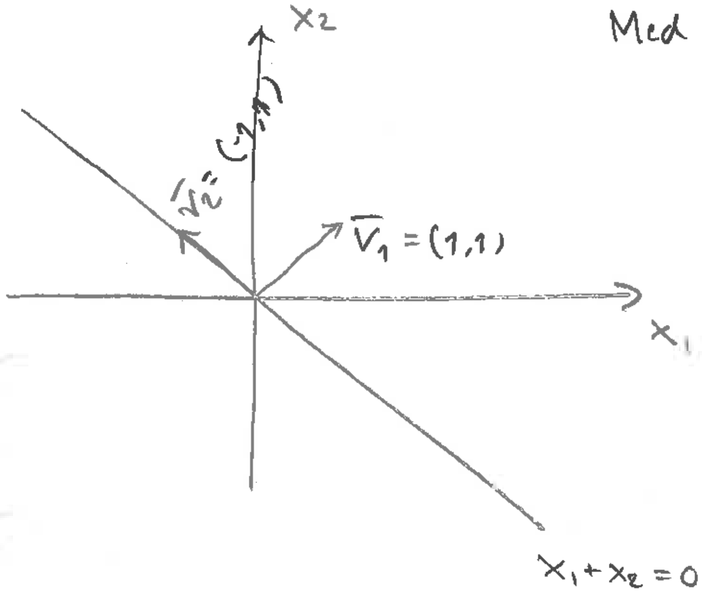
- Notera att $F(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \iff (F - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$.
  Så givet $\lambda \in \mathbb{R}$ finns $\bar{v} \neq \bar{0}$ som löser detta omm

  $F - \lambda I$ ej är inverterbar $\iff \det(F - \lambda I) = 0$.

- $p(\lambda) = \det(F - \lambda I)$ kallas sekularpolynomet till F. $\operatorname{grad} p(\lambda) = \dim \mathbb{V}$.

- Om det finns en bas av egenvektorer till F, då sägs F vara <u>diagonaliserbar</u>.

Ex 1: Låt $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vara spegling genom linjen $x_1 + x_2 = 0$.



Med $\bar{v}_1 = (1,1)$, $\bar{v}_2 = (-1,1)$ gäller

$F(\bar{v}_1) = -\bar{v}_1 = -1\bar{v}_1$

$F(\bar{v}_2) = \bar{v}_2 = 1\bar{v}_2$.

Så $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2)$ är en bas av egenvektorer till F och $A_v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 2: Låt $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ha matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$ i std. basen.

a) Hitta alla egenvärde till F

b) Bestäm egenrummen och hitta om möjligt bas så F har diagonal matris i denna.

Lösning:

a) $$p(\lambda) = |A - \lambda E| = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1 = (\lambda-2)^2 - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{5}$$

b)

$\lambda_1 = 2 + \sqrt{5}$ $$\begin{pmatrix} 1-(2+\sqrt{5}) & 2 \\ 2 & 3-(2+\sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1-\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 2 & 1-\sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{2}{1+\sqrt{5}}} \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1-\sqrt{5} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$1-\sqrt{5} + \frac{4}{1+\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})+4}{1+\sqrt{5}} = 0$$

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = (1+\sqrt{5})t \end{cases}$$ t.ex. $$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-(2-\sqrt{5}) & 2 & 0 \\ 2 & 3-(2-\sqrt{5}) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{5}-1 & 2 & 0 \\ 2 & \sqrt{5}+1 & 0 \end{array}\right) \quad \frac{-2}{\sqrt{5}-1}$$

$$\sqrt{5}+1-\frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{5-1-4}{\sqrt{5}-1} = 0$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{5}-1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = (\sqrt{5}-1)t \end{cases} \qquad \text{t.ex.} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

Om allt stämmer ska

$$A\underline{v} = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Test.

$$F(\bar{v}_1) = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 2+2+2\sqrt{5} \\ 4+3+3\sqrt{5} \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 4+2\sqrt{5} \\ 7+3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$(2+\sqrt{5})\begin{pmatrix} 2 \\ 1+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+2\sqrt{5} \\ 7+3\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$

$$F(\bar{v}_2) = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} -2+2\sqrt{5}-2 \\ -4+3\sqrt{5}-3 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} -4+2\sqrt{5} \\ -7+3\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$(2-\sqrt{5})\begin{pmatrix} -2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}-2-5+\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+2\sqrt{5} \\ -7+3\sqrt{5} \end{pmatrix} \quad \text{o.k.}$$

Sats: Om $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_k$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till $F : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$, då är de linjärt oberoende. Speciellt om det finns $\dim \mathbb{V}$ stycken olika egenvärden så finns bas av egenvektorer. 6

Bevis: ($k=2$-fallet)

Om $a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 = \bar{0}$ då gäller

$$\bar{0} = F(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2) = a_1 F(\bar{v}_1) + a_2 F(\bar{v}_2) =$$

$$= a_1\lambda_1\bar{v}_1 + a_2\lambda_2\bar{v}_2 = \lambda_1\underbrace{(a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2)}_{=\bar{0}} + a_2(\lambda_2 - \lambda_1)\bar{v}_2 = \bar{0}.$$

Eftersom $\bar{v}_2 \neq \bar{0}$ och $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ måste då $a_2 = 0$.
Men då måste även $a_1 = 0$ eftersom $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$. V.S.B

ON-diagonalisering: Om $\mathbb{E}$ Euklidiskt rum, $F : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ linjär och det finns en ON-bas till $\mathbb{E}$ bestående av egenvektorer till F (d.v.s. ON-bas i vilken F:s matris är diagonal) då sägs F vara ON-diagonaliserbar.

Spektralsatsen: F är ON-diagonaliserbar omm F är symmetrisk.

SPEKTRALSATSEN (2d-fallet, $A = A^t$):

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 =$$

$$= \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 - ac + b^2} =$$

$$= \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2+2ac+c^2-4ac}{4} + b^2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\underbrace{\frac{(a-c)^2}{4} + b^2}_{\geq 0}}$$

$\Rightarrow$ endast reella rötter!

Antag vidare att vi har rötter $\lambda_1 \neq \lambda_2$ och

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Då gäller att

$$(x_2 \ y_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 (x_1x_2 + y_1y_2) = \Big/ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Big/$$

$$= (x_1 \ y_1)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 (x_1x_2 + y_1y_2)$$

D.v.s. $\lambda_1(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda_2(x_1x_2 + y_1y_2)$

vilket bara går om $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

Om å andra sidan $p(\lambda)$ har dubbelrot,

då gäller att vi måste ha $a = c$ och $b = 0$

D.v.s. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

Detta svarar mot att alla vektorer är egenvektorer och $F(\bar{u}) = a\bar{u}$ ...

Allt detta kan sammanfattas så att om

$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ är linjär och symmetrisk

(d.v.s. har symm. matris i std.-basen)

$\Leftrightarrow$ F har en ON-bas av egenvektorer.

$\Leftarrow$ Ty $(TDT^t)^t = (T^t)^t D^t T^t = TDT^t$ om

D är diagonal.

Om F är symmetrisk och

$$F(\bar{v}_1) = \lambda_1 \bar{v}_1, \quad F(\bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_2 \quad \text{med} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

då gäller att $(\bar{v}_1|\bar{v}_2) = 0$. Ty om $\lambda_1 \neq 0$ ($\lambda_2 \neq 0$ behandlas analogt)

$$(\bar{v}_1|\bar{v}_2) = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1\bar{v}_1|\bar{v}_2) = \frac{1}{\lambda_1}(F(\bar{v}_1)|\bar{v}_2) = /F \text{ symm}/ =$$

$$= \frac{1}{\lambda_1}(\bar{v}_1|F(\bar{v}_2)) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(\bar{v}_1|\bar{v}_2)$$

vilket bara går om $(\bar{v}_1|\bar{v}_2) = 0$.

Ex 3: Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ i standardbasen.}$$

Hitta ON-bas av egenvektorer.

Lösning:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)((2-\lambda)^2-1) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+3) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3) =$$

$$= -(1-\lambda)^2(\lambda-3) = 0 \quad \text{ger} \quad \lambda = 1 \text{ eller } \lambda = 3.$$

$\lambda = 1$ (dubbelrot):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ; \quad \begin{cases} x_1 = s \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Välj $\bar{V}_1 = (1,0,0)$, $\bar{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$.

(OBS: $\bar{V}_1 \cdot \bar{V}_2 = 0$).

$\lambda = 3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) ; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = t \\ x_3 = t \end{cases}$$

$\bar{V}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$.

$V = (\bar{V}_1 \ \bar{V}_2 \ \bar{V}_3)$ är ON-bas till $\mathbb{R}^3$, och

$$A_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$