FÖRELÄSNING 20:

Rep:

- $F: \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ där $\mathbb{E}$ är n-dim. Euklidiskt rum och F är linjär sägs vara symmetrisk om
$$(F(\bar{u})|\bar{v}) = (\bar{u}|F(\bar{v})) \quad \forall \bar{u},\bar{v} \in \mathbb{E}.$$
Detta är ekvivalent med att F i ON-bas $\underline{e}$ till $\mathbb{E}$ har symmetrisk matris $A_{\underline{e}}$ $(A_{\underline{e}} = A_{\underline{e}}^t)$.

- Om F är symmetrisk så finns ON-bas $\underline{f}$ till $\mathbb{E}$ sådan att $A_{\underline{f}}$ är diagonal.

Ex1: Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha matris
$$A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{i std. basen.}$$
Bestäm en ON-bas $\underline{f}$ s.a. F har diagonal matris $A_{\underline{f}}$ i denna.

Lösning:

Steg 1: Bestäm egenvärden

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} (-1) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -(2-\lambda) & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left(\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \right)$$

$$= (2-\lambda)\left((3-\lambda)(4-\lambda) - 1 + (4-\lambda) - 1\right) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 14) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ eller } \lambda = 4 \pm \sqrt{2}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 4+\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = 4-\sqrt{2}$$

Steg 2: Bestäm egenvektorer ($F(\bar{f}_i)=\lambda_i\bar{f}_i \ldots$)

$\lambda_1 = 2$:

$$(A-\lambda_1 I|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{Välj t.ex.} \quad \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$$

$\lambda_2 = 4+\sqrt{2}$:

$$(A-\lambda_2 I|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1-\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1-\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1+\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = (1+\sqrt{2})^2 t - (2+\sqrt{2})t = (1+\sqrt{2})t \\ y = (1+\sqrt{2})t \\ z = (2+\sqrt{2})t \end{cases}$$

$$\text{Välj t.ex.} \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6(2+\sqrt{2})}}(1+\sqrt{2},\, 1+\sqrt{2},\, 2+\sqrt{2})$$

$\lambda_3 = 4-\sqrt{2}$:

$$(A-\lambda_3 I|\bar{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1+\sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1+\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1-\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x = (1-\sqrt{2})t \\ y = (1-\sqrt{2})t \\ z = (2-\sqrt{2})t \end{cases} \quad \text{t.ex.} \quad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{12-8\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2},\, 1-\sqrt{2},\, 2-\sqrt{2})$$

OBS! Egenvektorer hörande till olika egenvärden till symmetrisk avbildning är automatiskt ortogonala, d.v.s. $\underline{f} = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3)$ är en ON-bas till $\mathbb{R}^3$.

$$A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

OBS! Om $\underline{f} = \underline{e}T$ gäller $A_{\underline{f}} = T^t A T$

($F(\underline{f}Y) = F(\underline{e}X) = \underline{e}AX = \underline{f}T^tATY$ ty $T^t = T^{-1}$, $X = TY \ldots$)

Kvadratiska former på $\mathbb{R}^n$:

En funktion $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sådan att

$Q(\underline{e}X) = X^tAX$, där A är symmetrisk $(A^t = A)$

och $\underline{e}$ är standardbasen till $\mathbb{R}^n$, kallas en kvadratisk form.

T.ex. Om $n=2$ har vi

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

Vi noterar att

- $Q(\underline{e}\lambda X) = \lambda^2 Q(\underline{e}X)$,
- $Q(\underline{e}0) = 0$,
- Q är ett polynom som bara innehåller andragradstermer
- Om $X = TY$ där $\underline{f} = \underline{e}T$, $T^t = T^{-1}$ (d.v.s. $\underline{f}$ ON-bas)

  $Q(\underline{e}X) = Q(\underline{e}TY) = Y^tT^tATY$, och

  T^tAT är symmetrisk.

Alltså är $Q(\underline{f}Y) = Y^t(T^tAT)Y$,

så Q har denna form i alla ON-baser.

Enligt spektralsatsen finns ON-bas $\underline{f} = (\bar{f}_1 \; \bar{f}_2 \cdots \bar{f}_n)$ till $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A, med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Enligt ovanstående gäller om $\underline{f} = \underline{e}T$ att i denna bas har vi

$$Q(\underline{f}Y) = Y^t(T^tAT)Y = (y_1 \; y_2 \cdots y_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

Ex2: Ange en ny ON-bas till $\mathbb{R}^2$ så

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$ inte innehåller några bland-termer.

Lösning:

$$Q(x_1, x_2) = (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \left(= (x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \pm 2 \qquad \lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1$$

$\lambda_1 = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \end{cases} \qquad \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$\lambda_2 = -1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \end{cases} \qquad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$$

$$A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ så i $(\bar{f}_1\ \bar{f}_2)$-basen har vi

$$Q(x_1, x_2) = Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3y_1^2 - y_2^2.$$

Test: $\underline{f} = \underline{e}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$T^tT = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \text{ så } (x_1\ x_2) = (y_1\ y_2)T^t$$

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2)T^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}(y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (y_1\ y_2)\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Ex3: Ange en ny ON-bas till $\mathbb{R}^3$ s.a.

$$Q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$$

inte har några blandtermer i denna.

Lösning:

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \ x_2 \ x_3)\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Vi har redan löst ut egenvärden/egenvektorer till A

$\lambda_1 = 2$, $\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$

$\lambda_2 = 4+\sqrt{2}$, $\bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{6(2+\sqrt{2})}}(1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$

$\lambda_3 = 4-\sqrt{2}$, $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{12-8\sqrt{2}}}(1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2})$

Så $A_{\underline{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2y_1^2 + (4+\sqrt{2})y_2^2 + (4-\sqrt{2})y_3^2$$

<u>Teckenkaraktär:</u> En kvadratisk form Q sägs vara:

- positivt/negativt definit om $Q(\underline{e}X)>0$ / $Q(\underline{e}X)<0$ för alla $X \neq \bar{0}$.
- positivt/negativt semidefinit om $Q(\underline{e}X) \geq 0$ / $Q(\underline{e}X) \leq 0$ för alla X med likhet för ngt $X \neq \bar{0}$.
- Indefinit om Q antar både positiva och negativa värden.

Nedan låter vi $Q(\underline{e}X) = X^t A X$ som tidigare. Vi antar också att $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ är egenvärdena till A, och vi antar utan förlust att vi ordnat dem s.a.

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots \leq \lambda_n.$$

<u>Sats:</u> Q är

- positivt definit omm $\lambda_1 > 0$
- positivt semidefinit omm $\lambda_1 = 0$
- negativt definit omm $\lambda_n < 0$
- negativt semidefinit om $\lambda_n = 0$
- Indefinit om $\lambda_1 < 0$, $\lambda_n > 0$

<u>Bevis:</u> Vi noterar att

$Q(\underline{f}Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, så om t.ex. alla λ_i:a >0 så är detta uttryck >0 om minst ett av y_i:a är skilt från 0..

V.S.B.

Sats:

- $\lambda_1 |\underline{e}X|^2 \leq Q(\underline{e}X) \leq \lambda_n |\underline{e}X|^2 \quad \forall X$,
- λ_1/λ_n är det minsta/största värdet Q antar på $\{|\underline{e}X| = 1\}$, och detta värde antas i de punkter som är egenvektorer svarande mot λ_1/λ_n.

Bevis: $(n=2)$

Vi vet att i en ON-bas av egenvektorer $\underline{f} = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2)$ gäller

$$Q(\underline{e}X) = Q(\underline{f}Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 .$$

Eftersom $\underline{e}, \underline{f}$ är ON-baser gäller

$$x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 \quad \text{om} \quad \underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} .$$

Så eftersom $\lambda_1 \leq \lambda_2$ har vi

$$\lambda_1 |\underline{f}Y|^2 = \lambda_1 (y_1^2 + y_2^2) \leq \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \leq$$
$$\leq \lambda_2 (y_1^2 + y_2^2) = \lambda_2 |\underline{f}Y|^2 .$$

Vidare gäller

$$Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \lambda_1 y_1^2 , \quad Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix} 0 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda_2 y_2^2 .$$

V.S.B.

EX 4: Bestäm max/min på enhetscirkeln till $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$, samt avgör i vilka punkter dessa värden antas.

Lösning:

$$Q(x_1, x_2) = (x_1 \; x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Vi har redan räknat ut

$$\lambda_1 = 3, \quad \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

$$\lambda_2 = -1, \quad \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1),$$

samt

$$Q\left(\pm\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = 3y_1^2 - y_2^2.$$

Enhetscirkeln $x_1^2 + x_2^2 = 1 \iff y_1^2 + y_2^2 = 1$

Max $= 3$ antas då $y_1 = \pm 1$, $y_2 = 0 \iff (x_1, x_2) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

Min $= -1$ antas då $y_1 = 0$, $y_2 = \pm 1 \iff (x_1, x_2) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$.

(OBS: Q antar varken globalt max eller min på $\mathbb{R}^2$).