Exempel, Föreläsning 22:

1) Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha matris

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i standardbasen.}$$

Bestäm baser till F:s nollrum $N(F)$, värderum $V(F)$ samt $N(F) \cap V(F)$.

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x_3 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & -1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 - x_2 - 2x_3 \end{array}\right)$$

$N(F)$ ges av $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \end{cases}$, d.v.s. $N(F) = \{(t,-t,t) : t \in \mathbb{R}\} = [(1,-1,1)]$

$V(F) = [(1,1,0), (2,0,1)] = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$

OBS! $\dim N(F) + \dim V(F) = 1 + 2 = 3$.

$(1,-1,1)$ uppfyller $1 - (-1) - 2 \cdot 1 = 0$, så $N(F) \cap V(F) = N(F)$

SVAR: $(1,-1,1)$ är bas till $N(F) = N(F) \cap V(F)$.

$((1,1,0), (2,0,1))$ är bas till $V(F)$.

2) Låt $\underline{e}$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^3$ och

$\underline{f} = ((2,0,0)\quad(2,2,0)\quad(2,2,2))$

a) Bestäm övergångsmatrisen från $\underline{f}$ till $\underline{e}$-basen samt $\underline{e}$ till $\underline{f}$-basen. Bestäm koordinaterna i $\underline{f}$-basen till vektorn $(1,2,3)$.

b) Låt $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha matris $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ i $\underline{e}$-basen.

Bestäm F:s matris A_f i $\underline{f}$-basen.

Lösning:

$$\underline{f} = \underline{e}\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{T}$$

T är övergångsmatris från $\underline{f}$ till $\underline{e}$-basen.

D.v.s. $\underline{e}X_e = \underline{f}Y_f = \underline{e}TY \iff X_e = TY$.

T^{-1} är övergångsmatris från $\underline{e}$- till $\underline{f}$-basen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{f}\,T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{f}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{f}\,\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) $F(\underline{e}X_e) = \underline{e}A_eX_e = \underline{f}\underbrace{T^{-1}A_eT}_{A_f}Y_f$

$$A_f = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}}$$

---

3) Låt $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2$ vara en kvadratisk form på $\mathbb{R}^3$.

a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{R}^3$ s.a. Q i denna bas inte innehåller några blandtermer.

b) Bestäm största och minsta värdet till Q på $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Lösning:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \; x_2 \; x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1-\lambda\\ 1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} =$$

$= (1-\lambda)((1-\lambda)^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda) = (1-\lambda)\lambda(\lambda-2) = 0$ ger

$\lambda_1 = 2, \; \lambda_2 = 1, \; \lambda_3 = 0.$

$\underline{\lambda_1 = 2:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$$

$\underline{\lambda_2 = 1:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \bar{f}_2 = (0,0,1).$$

$\underline{\lambda_3 = 0:}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0).$$

$$Q\left(\underline{e}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = Q\left(\underline{f}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = 2y_1^2 + y_2^2.$$

b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \Leftrightarrow y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$

Max $= 2$ antas i $(y_1, y_2, y_3) = \pm(1,0,0) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

Min $= 0$ antas i $(y_1, y_2, y_3) = \pm(0,0,1) \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0).$

4)

Låt $\mathbb{W} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Bestäm en ON-bas till $\mathbb{W}$.

b) Utvidga denna till en ON-bas till hela $\mathbb{R}^3$.

c) Bestäm ON-bas till $\mathbb{W}^\perp$

Lösning:

a) $x_1 - x_2 + x_3 = 0 \iff \begin{cases} x_1 = s - t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \iff (x_1, x_2, x_3) = s(1,1,0) + t(-1,0,1)$

Så $(1,1,0), (-1,0,1)$ utgör en bas till $\mathbb{W}$, men ej ON-bas.

Vi använder Gram-Schmidt:

$\bar{f}_1 = \dfrac{(1,1,0)}{|(1,1,0)|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$\bar{u}_2 = (-1,0,1) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \cdot (-1,0,1)\right)\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) = (-1,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0) = \frac{1}{2}(-1,1,2)$

$\bar{f}_2 = \dfrac{\bar{u}_2}{|\bar{u}_2|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)$

$(\bar{f}_1\ \bar{f}_2)$ ON-bas till $\mathbb{W}$.

b) I detta fall är det enklast att helt enkelt välja $\bar{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$ som är normal till $\mathbb{W}$, men antag att vi inte gör detta. Då väljer vi en vektor $\bar{v}_3$ som ej uppfyller $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ t.ex. $\bar{v}_3 = (1,0,0)$ och sedan använder vi Gram-Schmidt

$\bar{u}_3 = \bar{v}_3 - (\bar{v}_3 \cdot \bar{f}_1)\bar{f}_1 - (\bar{v}_3 \cdot \bar{f}_2)\bar{f}_2 = \ldots = \frac{1}{3}(1,-1,1)$

$\bar{f}_3 = \dfrac{\bar{u}_3}{|\bar{u}_3|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$

$(\bar{f}_1\ \bar{f}_2\ \bar{f}_3)$ ON-bas till $\mathbb{R}^3$.

c) $(\bar{f}_3)$ ON-bas till $\mathbb{W}^\perp = \left\{(x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_1 + x_3 = 0 \end{cases}\right\}$.

(6)

5) Låt $F: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ ges av

$$F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = a_0 + a_1 + a_2 x$$

Bestäm en bas till F:s nollrum.

Lösning:

(Eftersom det är klart att $V(F) = \mathbb{P}_1$, så $\dim V(F) = 2$, så vet vi enligt dimensionssatsen att $\dim N(F) = 3 - 2 = 1$).

Låt $\underline{P_2} = (1 \; x \; x^2)$ $\quad \underline{P_1} = (1 \; x)$

$$F(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = F\left(\underline{P_2}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = a_0 + a_1 + a_2 x = \underline{P_1}\begin{pmatrix} a_0 + a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{P_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

$$N(F) = /\text{per. def.}/ = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0 + a_1 + a_2 x = 0\} =$$

$$= \left\{\underline{P_2}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{cases} a_0 = -s \\ a_1 = s \\ a_2 = 0 \end{cases}$$

så $N(F) = \{-s + sx : s \in \mathbb{R}\} =$

$$= \{-s(1-x) : s \in \mathbb{R}\}$$

Så $(1-x) = \underline{P_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ utgör en bas till $N(F)$

(OBS! polynom! $(1,-1,0)$ eller $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ <u>ej</u> ok som svar!)

6) Lös systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

i minstakvadratmening.

Lösning: $AX = Y$. Lös normalekvationen $A^tAX = A^tY$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 29 & 24 \end{array}\right) \leftarrow 1/2 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 1 \\ 5 & 29 & 24 \end{array}\right) -5$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 1 \\ 0 & 33/2 & 19 \end{array}\right) \leftarrow 2/33 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5/2 & 1 \\ 0 & 1 & 38/33 \end{array}\right) -5/2$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -62/33 \\ 0 & 1 & 38/33 \end{array}\right)$$

SVAR: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{33} \begin{pmatrix} -62 \\ 38 \end{pmatrix}$.

7) Lös systemet av diff. ekv:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 5x_1(t) + \sqrt{8}\, x_2(t) \\ x_2'(t) = \sqrt{8}\, x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases} \qquad x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 1.$$

Lösning:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{8} \\ \sqrt{8} & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \lambda_1 = 6,\ \lambda_2 = -3.$$

$\lambda_1 = 6$ ger egenvektor $\bar{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix}$ t.ex.

$\lambda_2 = -3$ ger egenvektor $\bar{f}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$ t.ex.

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \sqrt{8} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{8}\, C_1 - C_2 = 0 \\ C_1 + \sqrt{8}\, C_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1/9 \\ C_2 = \cancel{1/9}\ \frac{\sqrt{8}}{9} \end{cases}$$

SVAR: $$\begin{cases} x_1(t) = \frac{\sqrt{8}}{9} e^{6t} - \frac{\cancel{1}\sqrt{8}}{9} e^{-3t} \\ x_2(t) = \frac{1}{9} e^{6t} + \frac{\cancel{\sqrt{8}}\ 8}{9} e^{-3t}. \end{cases}$$

8) Beräkna A^6 då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Vi såg ovan att om $T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

då gäller $T^{-1} = T^t$ och

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = D. \quad \text{Så} \quad A = TDT^{-1}.$$

$$A^6 = (TDT^{-1})^6 = TD^6T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^6 \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 64 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 64 & 64 & 0 \\ 64 & 64 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \underline{\underline{\begin{pmatrix} 32 & 32 & 0 \\ 32 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}}$$

9) Låt $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha matris

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

i standardbasen.

Visa att F är en isometri, samt beskriv den geometriskt.

Lösning: $A^tA = \ldots = I \Rightarrow F$ är en isometri.

$\det A = \ldots \cancel{= 1} \Rightarrow F$ är en ~~vridning~~.

FEL! $\det A = -1$ F är faktiskt en spegling!

~~Vridningsaxel~~: $AX = X \iff (A-I)X = 0$:

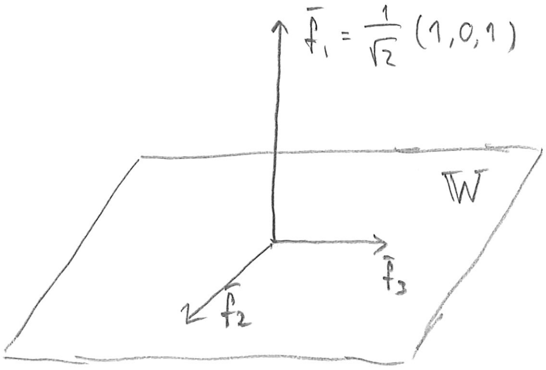
$$(A-I\,|\,0) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & -1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & -1/2 & 0 \end{array}\right) \sim \ldots \quad \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$$

systemet har fler lösningar; lösningarna bildar speglingsplanet.

$\bar{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

$\mathbb{W}$ har bas $\bar{f}_2 = (0,1,0)$

$\bar{f}_3 = \bar{f}_1 \times \bar{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$



$$F(\bar{f}_2) = \underline{e}\, A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{e} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \bar{f}_3$$

ej sant.

(P.S.S. $\cancel{F(\bar{f}_3) = -\bar{f}_2} \ldots$)

FEL

~~SVAR~~: Vridning med vinkel $\pi/2$ moturs sett från spetsen av $\bar{f}_1$.

Rätt svar: Spegling i planet $x_1 + \sqrt{2}\,x_2 - x_3 = 0$