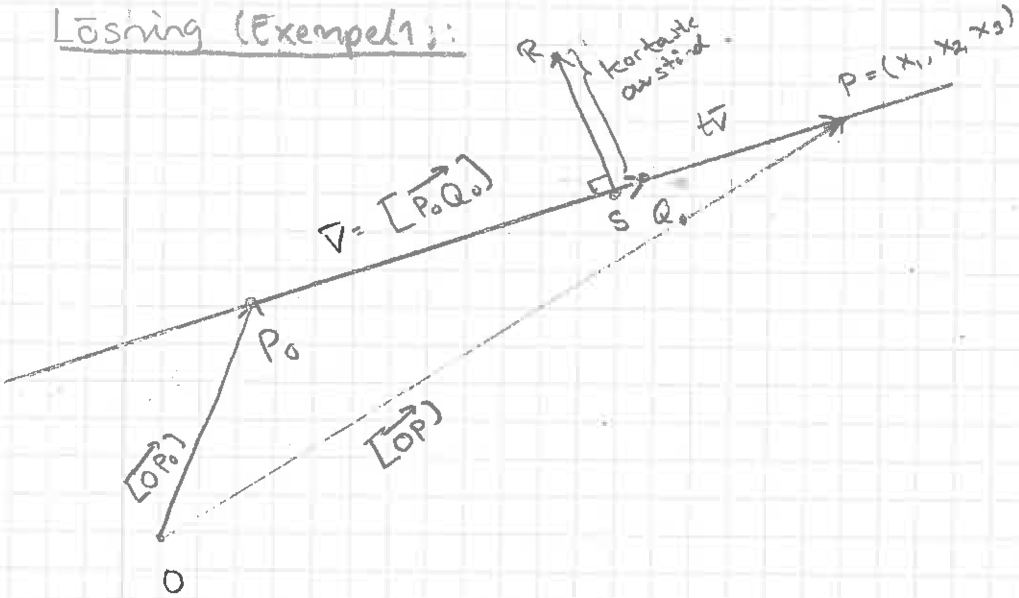
Exempel m.m. Föreläsning 4:

Ex1: Bestäm en ekvation på parameterform för den linje L i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkterna $P_0 = (2,5,1)$ och $Q_0 = (3,7,4)$.

Bestäm även (det kortaste) avståndet mellan linjen L och punkten $R = (3,0,2)$.

Lösning (Exempel 1):



Punkten P ligger på linjen L om och endast om det finns t sådant att $[\overrightarrow{OP}] = [\overrightarrow{OP_0}] + t\bar{v}$.

$\bar{v} = "Q_0 - P_0" = (3,7,4) - (2,5,1) = (1,2,3)$

Detta ger att

$$(x_1, x_2, x_3) = [\overrightarrow{OP_0}] + t\bar{v} = (2,5,1) + t(1,2,3) \qquad t \in \mathbb{R}, \text{ eller}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 5 + 2t \\ x_3 = 1 + 3t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

För att hitta (kortaste) avståndet mellan L och R vill vi hitta S på linjen sådant att $[\overrightarrow{SR}] \cdot \bar{v} = 0$.

D.v.s $S = (x_1, x_2, x_3)$ ska uppfylla dels

$$(x_1, x_2, x_3) = (2,5,1) + t(1,2,3) \quad \text{för ngt. } t \in \mathbb{R}$$

samt

$$((3,6,2) - (x_1, x_2, x_3)) \cdot (1,2,3) = 0 .$$

Detta ger

$$((3,6,2) - (2+t, 5+2t, 1+3t)) \cdot (1,2,3) =$$

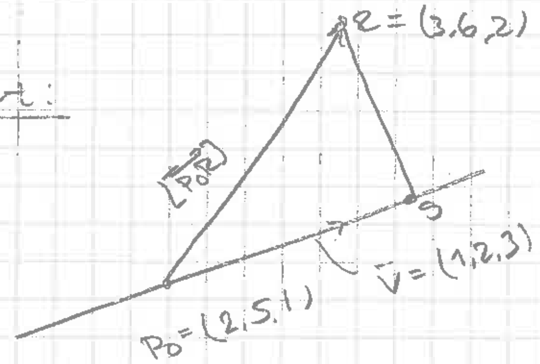
$$= (1-t, 1-2t, 1-3t) \cdot (1,2,3) = 1 \cdot (1-t) + 2(1-2t) + 3(1-3t) =$$

$$= 6 - 14t = 0 \iff t = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

Så $[\overrightarrow{SR}] = (1-3/7, 1-6/7, 1-9/7) = (4/7, 1/7, -2/7) = \frac{1}{7}(4,1,-2)$

$$|[\overrightarrow{SR}]| = \frac{1}{7}\sqrt{16+1+4} = \frac{\sqrt{21}}{7} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}}$$

Alternativt:



$$[\overrightarrow{SR}] = [\overrightarrow{P_0R}]_{\perp \bar{v}} = [\overrightarrow{P_0R}] - [\overrightarrow{P_0R}]_{\parallel \bar{v}}$$

$$[\overrightarrow{P_0R}] = (3,6,2) - (2,5,1) = (1,1,1)$$

$$[\overrightarrow{P_0R}]_{\parallel \bar{v}} = \frac{(1,1,1) \cdot (1,2,3)}{|(1,2,3)|^2}(1,2,3) = \frac{6}{14}(1,2,3) = \frac{3}{7}(1,2,3)$$

$$[\overrightarrow{SR}] = (1,1,1) - \frac{3}{7}(1,2,3) = (4/7, 1/7, -2/7)$$

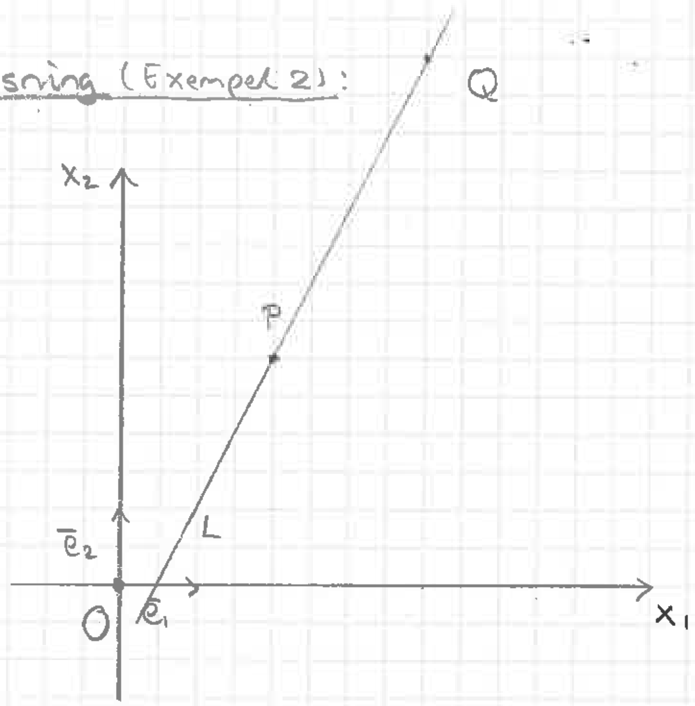
$$|[\overrightarrow{SR}]| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}} .$$

Närmsta punkten är $\underline{\underline{S = \frac{1}{7}(17, 41, 16)}}$.

Exempel 2:

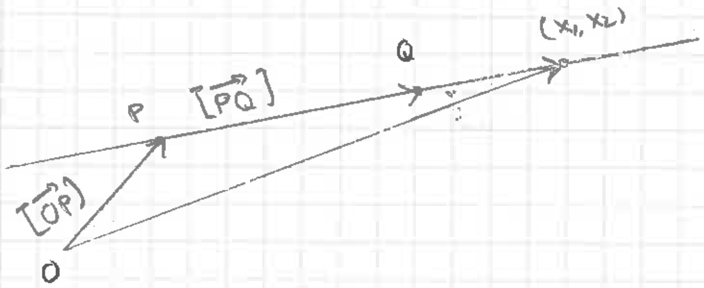
Låt $\underline{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ vara en ON-bas i planet och O vara valt. Bestäm linjen L genom de punkter P och Q som i denna bas har koordinater (2,3) respektive (4,7) på parameter-, riktningskoefficients- och normalform:

Lösning (Exempel 2):



Parameterform: (x_1, x_2) ligger på linjen om och endast om det finns $t \in \mathbb{R}$ sådant att

$$(x_1, x_2) = [\overrightarrow{OP}] + t\,[\overrightarrow{PQ}] = (2,3) + t((4,7)-(2,3)) = (2,3) + t(2,4)$$



$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Riktningskoefficientsform: ($x_2 = kx_1 + m$)

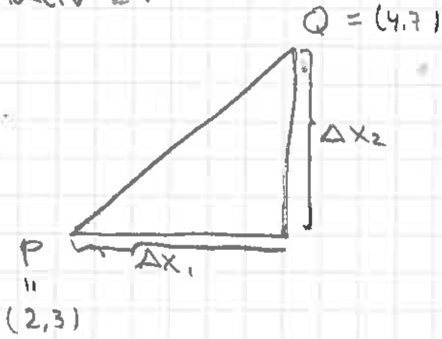
Alternativ 1: Vi har $\begin{cases} x_1 = 2 + 2t \\ x_2 = 3 + 4t \end{cases}$

Lös ut t ur $x_1 = 2+2t \Leftrightarrow t = \frac{x_1 - 2}{2}$, vilket ger

$$x_2 = 3 + 4t = 3 + 4\left(\frac{x_1-2}{2}\right) = 3 + 2x_1 - 4 = 2x_1 - 1$$

SVAR: $2x_1 - 1$.

Alternativ 2:



$$k = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{7-3}{4-2} = \frac{4}{2} = 2$$

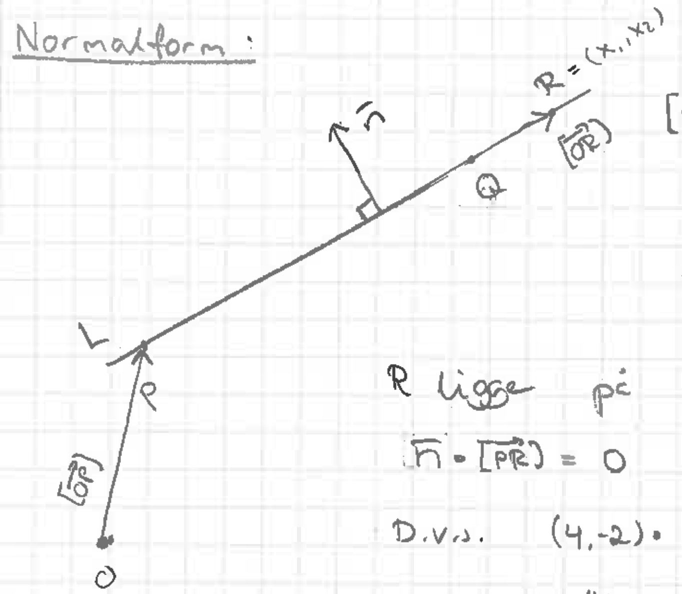
Så $x_2 = 2x_1 + m$

T.ex. ska nu $P = (2,3)$ ligga på L, och insatt i ekv. får vi

$3 = 2 \cdot 2 + m \Leftrightarrow m = -1$

SVAR: $x_2 = 2x_1 - 1$.

Normalform:



$[\overrightarrow{PQ}] = (2,4)$

$\bar{n} \cdot (2,4) = 0$ ger t.ex.

av $\bar{n} = (4,-2)$.

R ligger på L om och endast om

$\bar{n} \cdot [\overrightarrow{PR}] = 0$

D.v.s. $(4,-2) \cdot ((x_1, x_2) - (2,3)) =$

$= (4,-2) \cdot (x_1, x_2) - (4,-2) \cdot (2,3)$

$= 4x_1 - 2x_2 - 8 + 6 = 4x_1 - 2x_2 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4x_1 - 2x_2 = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{2x_1 - x_2 = 1}}$

(Alternativt kan detta fås från riktningskoefficientsformen...)

Ex3: Låt Π vara det unika plan som innehåller punkterna $(1,0,2)$, $(3,1,2)$ samt $(2,0,5)$ i $\mathbb{R}^3$

Låt L vara den linje i $\mathbb{R}^3$ som ges av

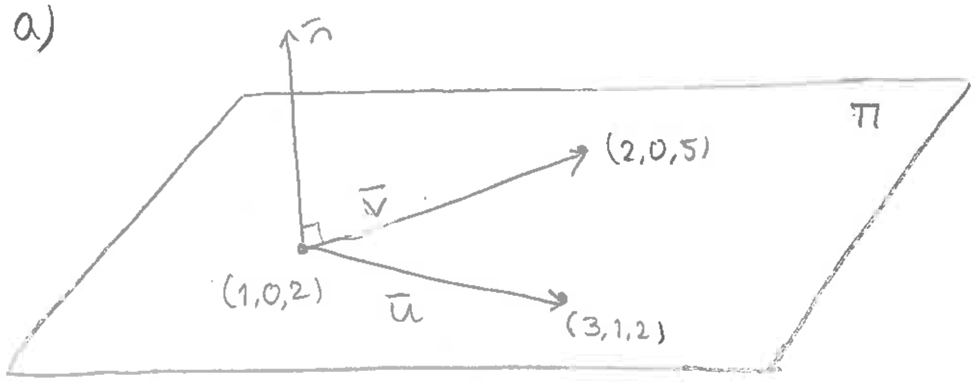
$$(x_1, x_2, x_3) = (1,1,-4) + t\,(1,1,1)$$

a) Bestäm ekvationer för Π på parameter- och normalform.

b) Bestäm skärningspunkten mellan L och Π.

Lösning (Exempel 3)

a)



$\bar{u} = (3,1,2) - (1,0,2) = (2,1,0)$

$\bar{v} = (2,0,5) - (1,0,2) = (1,0,3)$

Så π ges på parameterform av:

$$\underline{\underline{(x_1, x_2, x_3) = (1,0,2) + s(2,1,0) + t(1,0,3)}} \qquad s,t \in \mathbb{R}.$$

$$\bar{n} = \bar{u} \times \bar{v} = (2,1,0) \times (1,0,3) = \left| \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right| = (3, -6, -1)$$

Så π ges på normalform av:

$$(3,-6,-1) \cdot \left((x_1, x_2, x_3) - (1,0,2) \right) = (3x_1 - 6x_2 - x_3) - (3-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{3x_1 - 6x_2 - x_3 = 1}}$$

b) <u>Alternativ 1</u>:

Vi vill hitta punkt (x_1, x_2, x_3) som ligger på π och L.

D.v.s.

$$(x_1, x_2, x_3) = (1,0,2) + s(2,1,0) + t(1,0,3) \qquad (\text{i } \pi)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (1,1,-4) + w(1,1,1) \qquad (\text{på } L)$$

(OBS! vi måste använda <u>olika</u> parametrar i ekvationerna för π och L!)

D.v.s.

$$(1,0,2) + s(2,1,0) + t(1,0,3) = (1,1,-4) + w(1,1,1) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1+2s+t = 1+w \\ s = 1+w \\ 2+3t = -4+w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2s+t-w = 0 \\ s-w = 1 \\ 3t-w = -6 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right) \overset{-2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -6 \end{array}\right) \overset{-3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad w = 0, \ (s=1, t=-2)$.

Detta ger punkten $(1,1,-4) + 0(1,1,1) = \underline{\underline{(1,1,-4)}}$.

<u>Alternativ 2</u>: $(x_1, x_2, x_3) = (1,1,-4) + t(1,1,1) = (1+t, 1+t, -4+t)$.

insatt i $3x_1 - 6x_2 - x_3 = 1$ ger

$$3(1+t) - 6(1+t) - (-4+t) = -4t + 1 = 1 \Leftrightarrow t = 0$$

vilket ger $(x_1, x_2, x_3) = \underline{\underline{(1,1,-4)}}$.

Ex 4) Låt L vara skärningen mellan

$$3x_1+2x_2+x_3=2$$

och

$$x_1+3x_2+5x_3=3 \quad .$$

Låt Π ges av $x_1+x_2+x_3=0$.

a) Bestäm en ekvation på parameterform för linjen L.

b) Bestäm en ekvation på parameterform för Π

c) Bestäm avståndet mellan L och Π.

Lösning (Exempel 4)

a) Alternativ 1:
$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1+3x_2+5x_3=3 \end{cases} :$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -7 & -14 & -7 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \begin{matrix} -1/7 \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_2+2x_3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=t \\ x_2=1-2t \\ x_3=t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1,x_2,x_3)=(t,1-2t,t)=(0,1,0)+t(1,-2,1)$$

Alternativ 2: $(3,2,1)$ och $(1,3,5)$ är normaler till respektive plan (L ges av skärningen av två plan).
$(3,2,1)\times(1,3,5)=7(1,-2,1)$. Så $(1,-2,1)$ är riktningsvektor för L. Sedan hittar vi en punkt på L, t.ex. $(0,1,0)$ och får

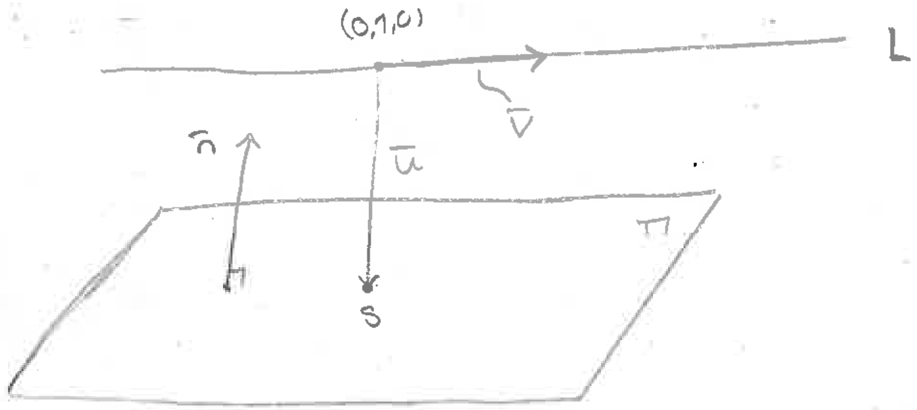
$$(x_1,x_2,x_3)=(0,1,0)+t(1,-2,1).$$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \iff x_1 = -x_2 - x_3 \iff$

$$\begin{cases} x_1 = -s-t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases} \quad s,t \in \mathbb{R} \quad \iff \quad (x_1, x_2, x_3) = (-s-t, s, t) = \underline{\underline{s(-1,1,0) + t(-1,0,1)}}$$

<u>SVAR:</u> $(x_1, x_2, x_3) = s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$.

c)



$\bar{v} = (1,-2,1)$

$\bar{n} = (1,1,1)$

Vi börjar med att kolla att $\bar{n} \cdot \bar{v} = 0$ (annars skär L och Π varandra ...)

$\bar{n} \cdot \bar{v} = (1,1,1) \cdot (1,-2,1) = 1-2+1 = 0$ o.k.

Vi vill nu hitta punkt $S = (s_1, s_2, s_3)$ på Π så att

$\bar{u} = (s_1, s_2-1, s_3) = t\bar{n}$ för ngt. t.

$\iff (s_1, s_2, s_3) = (0,1,0) + t(1,1,1)$

$s_1 + s_2 + s_3 = t + (1+t) + t = 1 + 3t = 0 \iff t = -1/3$.

Så $S = (-1/3, 2/3, -1/3)$ och $\bar{u} = (-1/3, -1/3, -1/3)$

Avståndet ges nu av $|\bar{u}| = \frac{1}{3}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \underline{\underline{1/\sqrt{3}}}$.