Exempel m.m. Föreläsning 5.

Lösning (exempel 1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \textcircled{1}\ \textcircled{1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \textcircled{2} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \end{array}\right) \textcircled{-1} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Vi har pivotelement "för x_1" i första raden och "för x_2" i andra raden, så vi kan välja $x_3 = t$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 7x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_3 = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 3x_3 = 2 - 2 \cdot \frac{5-5t}{7} - 3t \\ x_2 = \frac{5-5x_3}{7} = \frac{5-5t}{7} \\ x_3 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{4-11t}{7} \\ x_2 = \frac{5-5t}{7} \\ x_3 = t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 \\ 3+4 & 4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

3) $$2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 4 & 2\cdot 5 & 2\cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

4) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2\cdot 4 & 1\cdot 3+2\cdot 5 \\ 3\cdot 2+3\cdot 4 & 3\cdot 3+4\cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 13 \\ 22 & 29 \end{pmatrix}$$

5) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

6) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$A^t = A$, d.v.s. A är symmetrisk.

Antag att vi fått ekvationssystemet

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = k \\ cx_1 + dx_2 = l \end{cases}$$

Detta är ekvivalent med att

$$\begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$$

Om vi fått en matris $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och

vi vill hitta invers (om den existerar)

$A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ då betyder det att vi vill

ha

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D.v.s. $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \end{cases}$ och $\begin{cases} ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$.

Dessa system kan lösas simultant via

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ex2) Hitta A^{-1} om $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ samt lös

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}.$$

Lösning:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \textcircled{-2} \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \hookleftarrow \\ \textcircled{3} \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \leftarrow \textcircled{1/2} \\ \leftarrow \textcircled{-1} \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

så $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Ex 3) Hitta A^{-1} om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}\leftarrow \\ \big| \\ \boxed{-3}\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

TEST

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ O.K.

Ex 4:

Lös matrisekvationen

$$A^t X + BX = C$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösning:

$$A^t X + BX = C \iff (A^t + B)X = C$$

$$\iff \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \leftarrow ⓵/③ \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \boxed{-1} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad}_{I} \quad \underbrace{\quad}_{X}$$

SVAR: $X = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}$

(Test $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, så ok.)