Exempel m.m. Föreläsning 6:

- $\bar{u}+\bar{v}=\bar{u} \Rightarrow \bar{v}=\bar{0}$ ty $-\bar{u}+(\bar{u}+\bar{v})=(-\bar{u}+\bar{u})+\bar{v}=\bar{v}=-\bar{u}+\bar{u}=\bar{0}$.
- $0\bar{u}=(0+0)\bar{u}=0\bar{u}+0\bar{u} \Rightarrow 0\bar{u}=\bar{0}$.
- $\bar{0}=(1-1)\bar{u}=1\bar{u}+(-1)\bar{u}$ så $-1\bar{u}=-\bar{u}$.

Delrum. Om $\bar{u},\bar{v}\in U \Rightarrow \bar{u}+\bar{v}\in U$ och $\lambda\in\mathbb{R}, \bar{u}\in U \Rightarrow \lambda\bar{u}\in U$
då gäller speciellt att $\bar{0}=0\bar{u}\in U$ och $-\bar{u}=-1\bar{u}\in U$.
De övriga axiomen följer av att de håller för V.

Lösning (Ex 1):

- $(x_1,x_2,0)+(y_1,y_2,0)=(x_1+y_1,x_2+y_2,0)$
- $\lambda(x_1,x_2,0)=(\lambda x_1,\lambda x_2,0)$

så U är slutet under addition och multiplikation med skalär.

Lösning (Ex 2):

$(1,0,0)\in U$, $(0,1,0)\in U$ men $(1,0,0)+(0,1,0)=(1,1,0)\notin U$
så U är ej delrum.

(U är dock slutet under multiplikation med skalär).

Lösning (Ex 3):

$2\in\mathbb{R}$, $(1,0)\in U$ men $2(1,0)=(2,0)\notin U$
så ej delrum.

$[\bar{v}_1, \bar{v}_2]$ delrum: $(\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2) + (\mu_1\bar{v}_1 + \mu_2\bar{v}_2) =$

$$= (\lambda_1 + \mu_1)\bar{v}_1 + (\lambda_2 + \mu_2)\bar{v}_2$$

$$\lambda \cdot (\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2) = (\lambda\lambda_1)\bar{v}_1 + (\lambda\lambda_2)\bar{v}_2 .$$

Bevis sats (n=3): $\bar{v}_3 \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2]$ betyder att

$\bar{v}_3 = a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2$ för några $a, b \in \mathbb{R}$.

$\bar{v} \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3]$ betyder att $\bar{v} = \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \lambda_3\bar{v}_3 =$

$$= \lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 + \lambda_3(a\bar{v}_1 + b\bar{v}_2) = (\lambda_1 + \lambda_3 a)\bar{v}_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 b)\bar{v}_2 \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2].$$

Lösning (Ex 3):

$[(1,0,1)] = \{t(1,0,1) : t \in \mathbb{R}\}$ är en linje genom origo med riktningsvektor $(1,0,1)$.

$[(1,0,1), (0,1,2)] = \{s(1,0,1) + t(0,1,2) : s, t \in \mathbb{R}\}$ är ett plan genom origo med parallella vektorer $(1,0,1)$ och $(0,1,2)$.

Lösning (Ex 5):

Per definition är

$U = [(1,1,1), (2,1,0), (3,2,1), (4,3,2)]$ mängden av vektorer

$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,1,0) + \lambda_3(3,2,1) + \lambda_4(4,3,2)$.

Vi kan kasta bort vektorer som kan skrivas som linjärkombinationer av de som vi behåller.

Se på ekvationen

$$\lambda_1(1,1,1) + \lambda_2(2,1,0) + \lambda_3(3,2,1) + \lambda_4(4,3,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -s-2t \\ \lambda_2 = -s-t \\ \lambda_3 = s \\ \lambda_4 = t \end{cases}$$

Med $t=1$ och $s=0$ får vi

$$(-2)(1,1,1) + (-1)(2,1,0) + 0(3,2,1) + 1(4,3,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (4,3,2) = 2(1,1,1) + (2,1,0)$$

Med $t=0$, $s=1$ får vi

$$(-1)(1,1,1) + (-1)(2,1,0) + 1(3,2,1) + 0(4,3,2) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \quad (3,2,1) = (1,1,1) + (2,1,0).$$

SVAR: $U = [(1,1,1), (2,1,0)]$.