Lösning (Ex 1):

$$\lambda_1(0,1,1) + \lambda_2(1,0,2) + \lambda_3(1,1,3) = (0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{cases} : \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \quad : \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = t \end{cases}$$

Med $\lambda_3 = -1$ får vi $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, d.v.s.

$$1(0,1,1) + 1(1,0,2) - 1(1,1,3) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(1,1,3) = (0,1,1) + (1,0,2).$$

Om å andra sidan $\lambda_3 = 0$ då måste också $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, så $(0,1,1)$, $(1,0,2)$ är ej parallella.

Därför gäller att

$$[(0,1,1), (1,0,2), (1,1,3)] = [(0,1,1), (1,0,2)] =$$

$$= \{ s(0,1,1) + t(1,0,2) : s,t \in \mathbb{R} \}.$$

D.v.s. ett plan genom origo med riktningsvektorer $(0,1,1)$, $(1,0,2)$.

Lösning (Ex2):

$$\lambda_1(2,0,1,1) + \lambda_2(1,0,2,3) + \lambda_3(1,1,0,2) + \lambda_4(2,-1,3,2) = (0,0,0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_2 - 3\lambda_3 = -t \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 + \lambda_4 = -t \\ \lambda_3 = t \\ \lambda_4 = t \end{cases}$$

Eftersom vi har icke-triviala lösningar är vektorerna per definition <u>linjärt beroende</u>.

Lösning (Ex3):

$$\lambda_1(2 + x^2 + x^3) + \lambda_2(1 + 2x^2 + 3x^3) + \lambda_3(1 + x + 2x^3) +$$

$$+ \lambda_4(2 - x + 3x^2 + 2x^3) = (2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4) + (\lambda_3 - \lambda_4)x +$$

$$+ (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4)x^2 + (\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases} \ldots$$

<u>se ovan.</u>

Ex 4:

Bestäm en bas till $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$.

<u>Lösning:</u> Med $x_2 = s,\ x_3 = t$ får vi att $x_1 = -2s - t$

D.v.s. $(x_1, x_2, x_3) = (-2s-t, s, t) = s(-2,1,0) + t(-1,0,1)$.

Så $U = [(-2,1,0), (-1,0,1)]$

Givetvis är dessa vektorer linjärt oberoende för om

$(0,0,0) = s(-2,1,0) + t(-1,0,1)$ får vi direkt $s = t = 0$.

Alltså är $((-2,1,0), (-1,0,1))$ en bas till U.

Ex 5:

Visa att $\underline{u} = (1 \quad 1+x \quad x+x^2)$ är en bas till P_2, samt bestäm koordinaterna till $2+3x+5x^2$ i $\underline{u}$.

<u>Lösning:</u> Vi vill visa att

$\lambda_1 1 + \lambda_2(1+x) + \lambda_3(x+x^2) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ har entydig lösning

för alla c_0, c_1, c_2.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = c_0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = c_1 \\ \lambda_3 = c_2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c_0 \\ 0 & 1 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & c_0 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & c_0 - c_1 + c_2 \\ 0 & 1 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_2 \end{array}\right) \quad \text{D.v.s.} \quad \begin{cases} \lambda_1 = c_0 - c_1 + c_2 \\ \lambda_2 = c_1 - c_2 \\ \lambda_3 = c_2 \end{cases}$$

Alltså utgör de en bas

Med $c_0 = 2,\ c_1 = 3,\ c_2 = 5$ får vi $\begin{cases} \lambda_1 = 2 - 3 + 5 = 4 \\ \lambda_2 = 3 - 5 = -2 \\ \lambda_3 = 5 \end{cases}$

Så $2 + 3x + 5x^2 = \underline{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Lösning (Ex 6):

Beroende-ekvationen:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

pivot-element i första och andra kolumnen.

Vi kan dra slutsatsen att

$\mathbb{U} = [(2,1,0,1),(1,0,2,3)]$, samt att dessa två utgör en bas till $\mathbb{U}$.

Vi ska nästa föreläsning visa ett systematiskt sätt att utvidga baser, men låt oss nu "bara chansa" på att lägga till $(1,0,0,0)$ och $(0,1,0,0)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ endast triviala lösningen!

SVAR: $((2,1,0,1)\ (1,0,2,3))$ bas till $\mathbb{U}$.

$((2,1,0,1)\ (1,0,2,3)\ (1,0,0,0)\ (0,1,0,0))$ bas till $\mathbb{R}^4$.

Def: Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum. En ordnad uppsättning vektorer $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2 \dots \bar{v}_n)$ kallas en bas till $\mathbb{V}$ om

(1) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ är linjärt oberoende

(2) $\mathbb{V} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$

- $$\underline{v}\, X = \underline{v} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$$

- $\underline{v}$ är en bas omm varje vektor $\bar{v} \in \mathbb{V}$ på entydigt sätt kan skrivas p.f.

$$\bar{v} = \underline{v}\, X \qquad (X \text{ kallas } \bar{v}\text{:s koordinater i } \underline{v}).$$

Bevis ($n=2$): Om $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2)$ uppfyller ovanstående, då spänner de enligt antagande upp $\mathbb{V}$ samt så har vi $\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 = \underline{v}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \bar{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Omvänt om $\underline{v} = (\bar{v}_1\ \bar{v}_2)$ är en bas kan varje vektor enligt ant (2) skrivas som en linjärkomb. av $\bar{v}_1, \bar{v}_2$.

Vidare om

$$\lambda_1\bar{v}_1 + \lambda_2\bar{v}_2 = \mu_1\bar{v}_1 + \mu_2\bar{v}_2$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu_1)\bar{v}_1 + (\lambda_2 - \mu_2)\bar{v}_2 = \bar{0} \qquad \text{så } \lambda_1 = \mu_1,\ \lambda_2 = \mu_2. \quad \square$$

- Om $\mathbb{V}$ har en bas med n element då har alla andra baser till $\mathbb{V}$ också n element. Vi sätter $\dim \mathbb{V} = n$ $(\dim\{\bar{0}\} = 0)$.

Bevis ($n=1,2$): Om $\mathbb{V}$ hade två baser $(\bar{u}_1)$ resp. $(\bar{v}_1\ \bar{v}_2)$ då har vi $\bar{v}_1 = \lambda_1\bar{u}_1$, $\bar{v}_2 = \lambda_2\bar{u}_1$ där $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, så $\bar{v}_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\bar{v}_2$ vilket ger en motsägelse.