Lösning (Ex1):

Beroende-ekvationer

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}3\\0\\1\\-2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{ger}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & -2 & -4 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}-2 & -2\end{matrix} \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}-3 & 2\end{matrix} \updownarrow \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Pivotelement i kolumn 1 och 2 ger att

$$\underline{\underline{\left(\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\ \begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}\right)}} \text{ är en bas.}$$

Från lösningsrum till bas:

$$\left\{(x_1,x_2,x_3) : \begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=0\\ ex_1+fx_2+gx_3=0\end{cases}\right\}.$$

Om $\begin{cases}ax_1+bx_2+cx_3=0\\ ex_1+fx_1+gx_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1=\beta t\\ x_2=\alpha t\\ x_3=t\end{cases} \Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta t,\alpha t,t)=$

$$=t(\beta,\alpha,1)$$

$\Rightarrow$ $(\beta,\alpha,1)$ är en bas till lösningsrummet.

Lösning (Ex2):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -3 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 16 & 0 \end{array}\right)$$

D.v.s

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 8s - 32t - 7s + 28t = s - 4t \\ x_2 = \frac{4x_3 - 16x_4}{7} = 4s - 16t \\ x_3 = 7s \\ x_4 = 7t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3, x_4) = (s - 4t, 4s - 16t, 7s, 7t) =$$

$$= s(1,4,7,0) + t(-4,-16,0,7)$$

Så

$$\left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \right\} = \{ s(1,4,7,0) + t(-4,-16,0,7) : s,t \in \mathbb{R} \}$$

$$= [(1,4,7,0), (-4,-16,0,7)]$$

SVAR: $((1,4,7,0)\ (-4,-16,0,7))$.

Från linjärt hölje till bas

$$U = [\underbrace{(y_{11}, y_{21}, y_{31})}_{\bar{u}_1}, \underbrace{(y_{12}, y_{22}, y_{32})}_{\bar{u}_2}] =$$

$$= \{(x_1, x_2, x_3) : \text{finns } c_1, c_2 \text{ s.a. } (x_1, x_2, x_3) = c_1(y_{11}, y_{21}, y_{31}) + c_2(y_{12}, y_{22}, y_{32})\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, x_3) : \text{finns } c_1, c_2 \text{ s.a. } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ y_{31} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ y_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Om
$$\left(\begin{array}{cc|c} y_{11} & y_{12} & x_1 \\ y_{21} & y_{22} & x_2 \\ y_{31} & y_{32} & x_3 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cc|c} \alpha_1 & \alpha_2 & \beta_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_3 x_3 \\ 0 & \alpha_3 & \rho_1 x_1 + \rho_2 x_2 + \rho_3 x_3 \\ 0 & 0 & \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 \end{array}\right)$$

t.ex. då blir kravet för att lösning ska finnas exakt att $\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0$.

D.v.s. $U = \{(x_1, x_2, x_3) : \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3 = 0\}$.

Lösning (Ex3):

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ för några } c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & x_4 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & x_3 \\ 0 & 3 & -3 & 3 & x_4 - x_2 \end{array}\right) \begin{array}{c} -2 \quad -3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1 + 5x_2 + x_4 \end{array}\right)$$

Så $\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

Utvidgning av baser:

Om $\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \\ ex_1 + fx_2 + gx_3 = 0 \end{cases} \right\} = [\bar{u}_1]$ säg,

låt $\mathbb{U}_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) : ex_1 + fx_2 + gx_3 = 0 \}$.

Välj $\bar{u}_2 = (x_1, x_2, x_3)$ s.a. $ex_1 + fx_2 + gx_3 = 0$ men $ax_1 + bx_2 + cx_3 \neq 0$.

Då ligger $\bar{u}_2$ i $\mathbb{U}_1$ men <u>ej</u> i $\mathbb{U}$. Så $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ är bas till $\mathbb{U}_1$.

Välj slutligen $\bar{u}_3 = (x_1, x_2, x_3)$ s.a. $ex_1 + fx_2 + gx_3 \neq 0$.

Då ligger $\bar{u}_3$ ej i $\mathbb{U}_1$ så $(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$ är en bas till $\mathbb{R}^3$.

Lösning (Ex 4):

Enligt lösningen till Ex 3 gäller

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \\ -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}, \quad \text{och}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 3 & x_1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & x_3 \\ 1 & 3 & -2 & 4 & x_4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & x_1 - 2x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2x_1 + 4x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3x_1 + 5x_2 + x_4 \end{array}\right).$$

Med $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ ä detta beroendeekvationer till vektorerna. Då vi har pivotelement i kolumn 1 och 2 ser vi att $((2,1,0,1)\ (1,0,2,3))$ är en bas till $\mathbb{U}$.

Låt $\mathbb{U}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : -3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0\}$,

och välj $\bar{u}_3 = (1,0,0,3)$. Notera att då $-2 \cdot 1 \neq 0$ men

$-3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 0$ så ser vi

att $\bar{u}_3 \in \mathbb{U}_1$ men ~~ej~~ $\mathbb{U}$.

$((2,1,0,1)\ (1,0,2,3)\ (1,0,0,3))$ är därför en bas till $\mathbb{U}_1$.

Om vi nu slutligen tar $\bar{u}_4 = (1,0,0,0)$ så gäller $-3 \cdot 1 \neq 0$,

så $\bar{u}_4 \notin \mathbb{U}_1$, alltså blir

$((2,1,0,1)\ (1,0,2,3)\ (1,0,0,3)\ (1,0,0,0))$ en bas till $\mathbb{R}^4$

Lösning (Ex 5): Låt $\underline{P} = (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4)$

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = \underline{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{U} = \left\{ \underline{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : \text{finns } c_1, c_2 \text{ s.a. } \underline{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = c_1\underline{P}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\underline{P}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

D.v.s $$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & a_0 \\ 1 & -1 & a_1 \\ 1 & 2 & a_2 \\ -3 & 1 & a_3 \\ 1 & 0 & a_4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_4 \\ 0 & -1 & a_1 - a_4 \\ 0 & 2 & a_2 - a_4 \\ 0 & 1 & a_3 + 3a_4 \\ 0 & 2 & a_0 - 2a_4 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & a_4 \\ 0 & 1 & a_3 + 3a_4 \\ 0 & 0 & a_2 - 2a_3 - 7a_4 \\ 0 & 0 & a_1 + a_3 + 2a_4 \\ 0 & 0 & a_0 - 2a_3 - 8a_4 \end{array}\right)$$

Så

$$\mathbb{U} = \left\{ \underline{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} a_0 - 2a_3 - 8a_4 = 0 \\ a_1 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_2 - 2a_3 - 7a_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

(OBS! systemet är på trappstegsform).

$(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2) = \left(\underline{P}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{P}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ är en bas till $\mathbb{U}$.

(Forts.)

$$\mathbb{U}_1 = \left\{ \underline{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : \begin{cases} a_1 + a_3 + 2a_4 = 0 \\ a_2 - 2a_3 - 7a_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

$\bar{u}_3 = \underline{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ uppfyller bägge dessa ekvationer, men

$0 - 2\cdot(-2) - 8\cdot 0 = 4 \neq 0$ så $\bar{u}_3 \notin \mathbb{U}$.

så $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3)$ är en bas till $\mathbb{U}_1$.

$$\mathbb{U}_2 = \left\{ \underline{P}\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} : a_2 - 2a_3 - 7a_4 = 0 \right\}$$

$\bar{u}_4 = \underline{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ uppfyller $a_2 - 2a_3 - 7a_4 = 0$ men $a_1 + a_3 + 2a_4 \neq 0$

så $\bar{u}_4 \in \mathbb{U}_2$ men $\bar{u}_4 \notin \mathbb{U}_1$ så $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\ \bar{u}_4)$ är en bas till $\mathbb{U}_2$.

$\bar{u}_5 = \underline{P}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ligger slutligen inte i $\mathbb{U}_2$, så

$(\bar{u}_1\ \bar{u}_2\ \bar{u}_3\ \bar{u}_4\ \bar{u}_5)$ är en bas till $\mathbb{P}_4$.

SVAR: $(2 + x + x^2 - 3x^3 + x^4 \quad 2 - x + 2x^2 + x^3)$ är en bas till $\mathbb{U}$.

$(2 + x + x^2 - 3x^3 + x^4 \quad 2 - x + 2x^2 + x^3 \quad x - 2x^2 - x^3 \quad -2x^2 - x^3 \quad x^2)$ bas till $\mathbb{U}$.

(Alt: $\left(\underline{P}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \ \underline{P}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ bas till $\mathbb{U}$ ...)