Föreläsning 9.

Skalärprodukt: $\mathbb{E}$ vektorrum $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{E}$ $(\bar{u}|\bar{v}) \in \mathbb{R}$ s.a.

- $(\bar{u}|\bar{v}) = (\bar{v}|\bar{u})$
- $(\bar{u}|\bar{v}+\bar{w}) = (\bar{u}|\bar{v}) + (\bar{u}|\bar{w})$
- $(\bar{u}|\lambda\bar{v}) = \lambda(\bar{u}|\bar{v})$
- $(\bar{u}|\bar{u}) \geq 0$ med likhet omm $\bar{u} = \bar{0}$.

Euklidiskt rum: Vektorrum $\mathbb{E}$ tillsammans med en skalärprodukt.

Ex: $\mathbb{R}^n$ med standard skalärprodukten $(x_1, x_2, \dots, x_n) \bullet (y_1, y_2, \dots, y_n) =$
$= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ är ett Euklidiskt rum
(Ibland betecknat $\mathbb{E}^n$.)

Def: $(\mathbb{E}, (\cdot|\cdot))$ Euklidiskt rum

- $|\bar{u}| := \sqrt{(\bar{u}|\bar{u})}$
- $d(\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u} - \bar{v}|$
- $\bar{u} \perp \bar{v}$ om $(\bar{u}|\bar{v}) = 0$
- Vinkel $\theta \in [0, \pi]$ mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$ s.a. $\cos\theta = \dfrac{(\bar{u}|\bar{v})}{|\bar{u}||\bar{v}|}$.

Vi kan också, givet vektorer $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$, dela upp

$\bar{u} = \bar{u}_{\parallel\bar{v}} + \bar{u}_{\perp\bar{v}}$ där $\bar{u}_{\parallel v}$ är parallell med $\bar{v}$
och $\bar{u}_{\perp\bar{v}}$ är ortogonal mot $\bar{v}$ och precis
som i $\mathbb{R}^n$ gäller

$$\bar{u}_{\parallel\bar{v}} = \frac{(\bar{u}|\bar{v})}{|\bar{v}|^2}\bar{v}$$

1) Antag att E är ett vektorrum och $\underline{e} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ är en bas till E.

Om vi definierar

$$(\bar{u}|\bar{v}) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

då $\bar{u} = \underline{e}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_n \end{pmatrix}$ $\bar{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

då blir $(\cdot|\cdot)$ en skalärprodukt på E.

Notera att

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n)$$

Vi gör normalt ingen skillnad mellan denna 1×1-matris och motsvarande reella tal.

D.v.s om $\bar{u} = \underline{e}X$ $\bar{v} = \underline{e}Y$ har vi ovan $(\bar{u}|\bar{v}) = X^t Y$.

• Låt $C([a,b])$ vara mängden av kontinuerliga funktioner på $[a,b]$ och definiera

$$(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

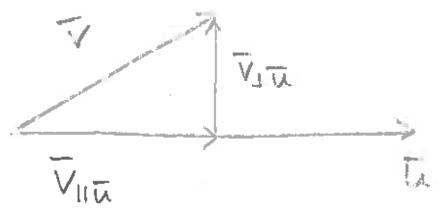
Detta är en skalärprodukt på $C([a,b])$.

Pythagoras sats: $(\bar u|\bar v) = 0 \Rightarrow |\bar u+\bar v|^2 = |\bar u|^2 + |\bar v|^2$

B: $|\bar u+\bar v|^2 = (\bar u+\bar v|\bar u+\bar v) = \underbrace{(\bar u|\bar u)}_{=|\bar u|^2} + \underbrace{(\bar u|\bar v)}_{=0} + \underbrace{(\bar v|\bar u)}_{=0} + \underbrace{(\bar v|\bar v)}_{=|\bar v|^2} = |\bar u|^2 + |\bar v|^2$. V.S.B.

Cauchy-Schwarz olikhet: $|(\bar u|\bar v)| \le |\bar u||\bar v|$.

B:



Noter att om vi sätter $\bar v_{\parallel\bar u} = \frac{(\bar u|\bar v)}{|\bar u|^2}\bar u$ då gäller att

$$(\bar u|\bar v-\bar v_{\parallel\bar u}) = (\bar u|\bar v) - (\bar u|\bar v_{\parallel\bar u}) = (\bar u|\bar v) - \frac{(\bar u|\bar v)}{|\bar u|^2}(\bar u|\bar u) = (\bar u|\bar v) - (\bar u|\bar v) = 0.$$

Så $\bar v_{\perp\bar u} = \bar v - \bar v_{\parallel\bar u}$ är ortogonal mot $\bar u$, och speciellt har vi alltså

$(\bar u|\bar v) = (\bar u|\bar v_{\parallel\bar u})$. Enligt Pythagoras sats gäller att

$|\bar v|^2 = |\bar v_{\perp\bar u}|^2 + |\bar v_{\parallel\bar u}|^2$, så speciellt gäller att $|\bar v_{\parallel\bar u}| \le |\bar v|$.

Så vi får nu

$$|\bar u||\bar v| \ge |\bar u||\bar v_{\parallel\bar u}| = |\bar u|\left|\frac{(\bar u|\bar v)}{|\bar u|^2}\bar u\right| = |(\bar u|\bar v)|.$$ V.S.B.

Triangelolikheten: $|\bar u+\bar v| \le |\bar u|+|\bar v|$.

$$|\bar u+\bar v|^2 = (\bar u+\bar v|\bar u+\bar v) = |\bar u|^2 + |\bar v|^2 + 2(\bar u|\bar v) \le |\bar u|^2 + |\bar v|^2 + 2|(\bar u|\bar v)| \le$$

$$\le |\bar u|^2 + |\bar v|^2 + 2|\bar u||\bar v| = (|\bar u| + |\bar v|)^2 \Rightarrow |\bar u+\bar v| \le |\bar u| + |\bar v|.$$ V.S.B.

<u>ON-mängder / ON-baser</u>: $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_m$ i Euklidiskt rum $\mathbb{E}$ kallas en ON-mängd om

$$(\bar{u}_i|\bar{u}_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}.$$

Om $(\bar{u}_1\ \bar{u}_2 \ldots \bar{u}_m)$ utgör en bas till $\mathbb{E}$ kallas det en ON-bas.

<u>Sats</u>: En ON-mängd är alltid linjärt oberoende.

<u>Bevis (m=2)</u>: Om $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 = \bar{0}$ då gäller

$$0 = (\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2|\bar{u}_1) = \lambda_1\underbrace{(\bar{u}_1|\bar{u}_1)}_{=1} + \lambda_2\underbrace{(\bar{u}_2|\bar{u}_1)}_{=0} = \lambda_1$$

Så $\lambda_1 = 0$. P.s.s. är $\lambda_2 = 0$. V.S.B.

<u>Sats</u>: Om $\underline{u} = (\bar{u}_1\ \bar{u}_2 \cdots \bar{u}_m)$ är en ON-bas till $\mathbb{E}$ då gäller

$$\left(\underline{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \middle| \ \underline{u}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_my_m.$$

Bevis (m=2):

$$(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 \mid y_1\bar{u}_1 + y_2\bar{u}_2) = (x_1\bar{u}_1 \mid y_1\bar{u}_1) + (x_1\bar{u}_1 \mid y_2\bar{u}_2) + (x_2\bar{u}_2 \mid y_1\bar{u}_1) +$$

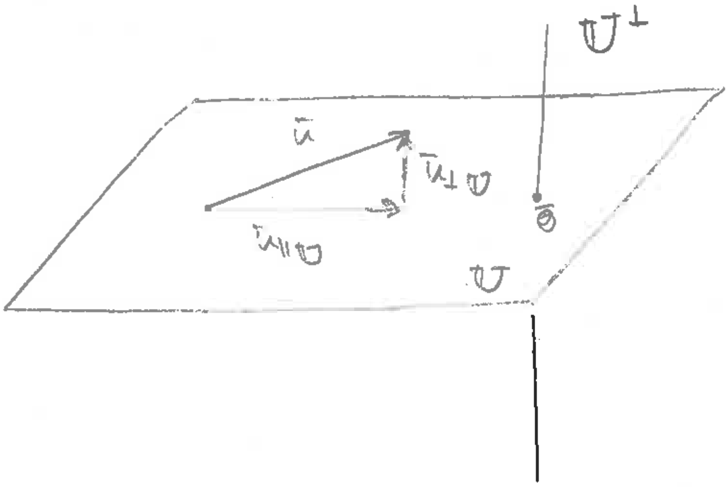
$$+ (x_2\bar{u}_2 \mid y_2\bar{u}_2) = x_1y_1\underbrace{(\bar{u}_1 \mid \bar{u}_1)}_{=1} + x_1y_2\underbrace{(\bar{u}_1 \mid \bar{u}_2)}_{=0} + x_2y_1\underbrace{(\bar{u}_2 \mid \bar{u}_1)}_{=0} + x_2y_2\underbrace{(\bar{u}_2 \mid \bar{u}_2)}_{=1}$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2 .$$ V.S.B.

Ortogonal projektion på delrum:

$\mathbb{U}$ delrum till $\mathbb{E}$.

$\mathbb{U}^\perp := \{\bar{v} \in \mathbb{E} : (\bar{v} \mid \bar{u}) = 0 \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{U}\}$ (också delrum till $\mathbb{E}$).



6

Sats: Om $\mathbb{U} = [\bar u_1, \bar u_2, \dots, \bar u_m]$ då gäller att

$$\mathbb{U}^\perp = \{\bar v \in \mathbb{E} : (\bar v | \bar u_i) = 0 \quad \text{för } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Sats: Om $(\bar u_1\ \bar u_2 \cdots \bar u_m)$ är en ON-bas till delrummet $\mathbb{U}$ i $\mathbb{E}$, då gäller att vektorn

$$\bar u_{\parallel \mathbb{U}} := (\bar u|\bar u_1)\bar u_1 + (\bar u|\bar u_2)\bar u_2 + \dots + (\bar u|\bar u_m)\bar u_m \in \mathbb{U},$$

$$\bar u_{\perp \mathbb{U}} := \bar u - \bar u_{\parallel \mathbb{U}} \in \mathbb{U}^\perp.$$

Vi kallar $\bar u_{\parallel \mathbb{U}}$ den ortogonala projektionen av $\bar u$ på $\mathbb{U}$.

Gram-Schmidts metod: (Skapa ON-bas från bas)

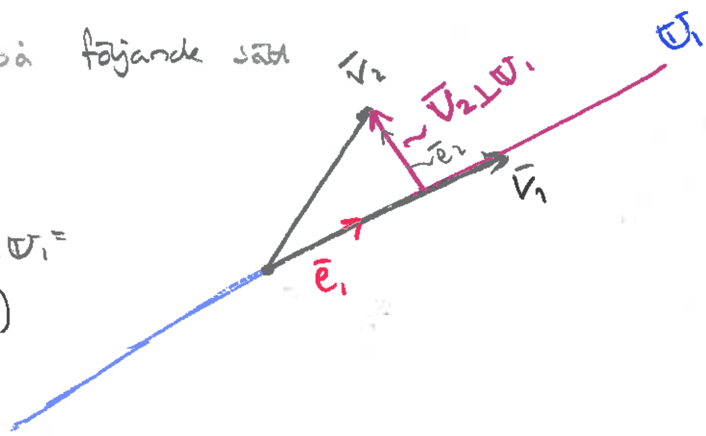
Antag att $(\bar v_1\ \bar v_2 \cdots \bar v_m)$ är en bas till $\mathbb{E}$.

Låt $\mathbb{U}_j = [\bar v_1, \bar v_2, \dots, \bar v_j]$.

Vi kan nu skapa ON-bas på följande sätt

$\bar e_1 = \bar v_1 / |\bar v_1|$

$\bar e_2 = \dfrac{\bar v_{2\perp \mathbb{U}_1}}{|\bar v_{2\perp \mathbb{U}_1}|}$, $\left(\bar v_{2\perp \mathbb{U}_1} = \bar v_2 - \bar v_{2\parallel \mathbb{U}_1} = \bar v_2 - (\bar v_2|\bar e_1)\bar e_1\right)$



$\bar e_3 = \dfrac{\bar v_{3\perp \mathbb{U}_2}}{|\bar v_{3\perp \mathbb{U}_2}|}$ o.s.v.

vilket ger en ON-bas till $\mathbb{E}$.

OBS! $[\bar v_1, \bar v_2, \dots \bar v_j] = [\bar e_1, \bar e_2, \dots, \bar e_j]$ för varje j.

3) Låt $\mathbb{U} = \{(x_1,x_2,x_3) : x_1+x_2+x_3=0\} \subset \mathbb{R}^3$

Bestäm en ON-bas till $\mathbb{U}$.

Beräkna $\bar{u}_{\parallel \mathbb{U}}$ och $\bar{u}_{\perp \mathbb{U}}$ då $\bar{u} = (1,1,2)$

Lösning:

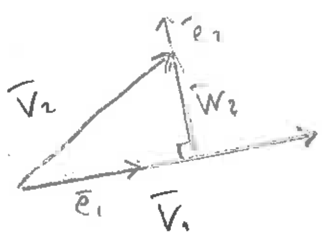
Steg 1: hitta bas till $\mathbb{U}$: $x_1+x_2+x_3=0 \iff \begin{cases} x_1 = -s-t \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$

$\iff (x_1,x_2,x_3) = s(-1,1,0) + t(-1,0,1)$.

Så $(-1,1,0), (-1,0,1)$ är en bas till $\mathbb{U}$, men

$(-1,1,0)\cdot(-1,0,1) = 1 \neq 0$, så ej ortogonala.

Steg 2: skapa ON-bas



$\bar{e}_1 = \frac{\bar{V}_1}{|\bar{V}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$

$\bar{W}_2 = \bar{V}_2 - (\bar{V}_2|\bar{e}_1)\bar{e}_1 = (-1,0,1) - \frac{1}{2}((-1,0,1)|(-1,1,0))(-1,1,0) =$

$= (-1,0,1) - \frac{1}{2}(-1,1,0) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1) = \frac{1}{2}(-1,-1,2)$

$\bar{e}_2 = \frac{\bar{W}_2}{|\bar{W}_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2)$.

(test. $(-1,1,0)\cdot(-1,-1,2) = 1-1=0$, $-1-1+2=0$)

$\bar{e}_1, \bar{e}_2$ är nu en ON-bas till $\mathbb{U}$

$\bar{u}_{\parallel \mathbb{U}} = (\bar{u}|\bar{e}_1)\bar{e}_1 + (\bar{u}|\bar{e}_2)\bar{e}_2 = \frac{1}{2}\underbrace{((1,1,2)|(-1,1,0))}_{=0}(-1,1,0) + \frac{1}{6}\underbrace{((1,1,2)|(-1,-1,2))}_{2}(-1,-1,2)$
$= \frac{1}{3}(-1,-1,2)$.

$\bar{u}_{\perp \mathbb{U}} = \bar{u} - \bar{u}_{\parallel \mathbb{U}} = (1,1,2) - \frac{1}{3}(-1,-1,2) = \frac{1}{3}(4,4,4) = \frac{4}{3}(1,1,1)$.

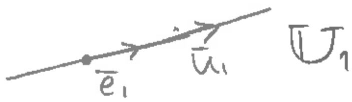
4) Låt $\bar{u}_1 = (1,1,0,0)$, $\bar{u}_2 = (1,0,1,0)$, $\bar{u}_3 = (0,0,1,1)$, $\bar{u}_4 = (0,0,0,1)$ vara en bas till $\mathbb{R}^4$. Låt vidare

$$U_1 = [\bar{u}_1],\quad U_2 = [\bar{u}_1, \bar{u}_2],\quad U_3 = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3].$$

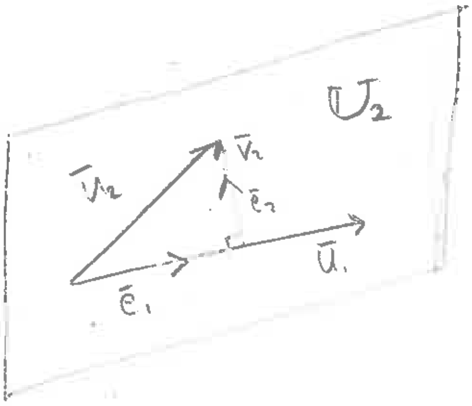
Skapa en ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ till $\mathbb{R}^4$ så att

$$U_1 = [\bar{e}_1],\quad U_2 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2],\quad U_3 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3].$$

Lösning:



$$\bar{e}_1 = \frac{1}{|\bar{u}_1|}\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$$



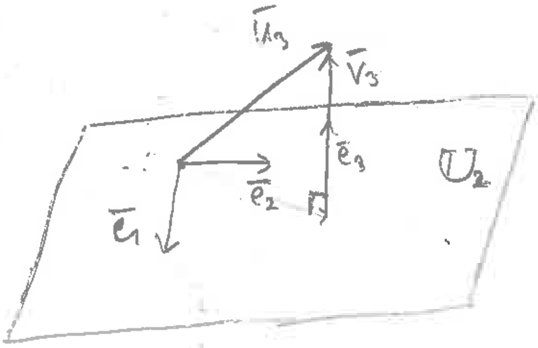
$$\bar{v}_2 = \bar{u}_{2\perp \bar{e}_1} = \bar{u}_2 - (\bar{u}_2|\bar{e}_1)\bar{e}_1 =$$

$$= (1,0,1,0) - \frac{1}{2}((1,0,1,0)|(1,1,0,0))(1,1,0,0) =$$

$$= (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = (\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, 1, 0) =$$

$$= \frac{1}{2}(1,-1,2,0)$$

$$\bar{e}_2 = \frac{1}{|\bar{v}_2|}\bar{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,2,0)$$



$$\bar{v}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_{3\parallel U_2} = \bar{u}_3 - (\bar{u}_3|\bar{e}_1)\bar{e}_1 - (\bar{u}_3|\bar{e}_2)\bar{e}_2 =$$

$$= (0,0,1,1) - \frac{1}{2}\underbrace{((0,0,1,1)|(1,1,0,0))}_{=0}(1,1,0,0) -$$

$$- \frac{1}{6}\underbrace{((0,0,1,1)|(1,-1,2,0))}_{=2}(1,-1,2,0)$$

$$= (0,0,1,1) - \frac{1}{3}(1,-1,2,0) = \frac{1}{3}(-1,1,1,3)$$

$$\bar{e}_3 = \frac{1}{|\bar{v}_3|}\bar{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}}(-1,1,1,3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-1,1,1,3).$$

$$\bar{v}_4 = \bar{u}_4 - \bar{u}_4 \| W_3 = \bar{u}_4 - (\bar{u}_4|\bar{e}_1)\bar{e}_1 - (\bar{u}_4|\bar{e}_2)\bar{e}_2 - (\bar{u}_4|\bar{e}_3)\bar{e}_3 =$$

$$= /\ (\bar{u}_4|\bar{e}_1) = (\bar{u}_4|\bar{e}_2) = 0\ / =$$

$$= (0,0,0,1) - \tfrac{1}{12}((0,0,0,1)|(-1,1,1,3))(-1,1,1,3) = (0,0,0,1) - \tfrac{1}{4}(-1,1,1,3) =$$

$$= \tfrac{1}{4}(1,-1,-1,1)$$

$$\bar{e}_4 = \frac{1}{|\bar{v}_4|}\bar{v}_4 = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1)$$