

Linjär Algebra, Föreläsning 12

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Determinanten är en funktion som tar kvadratiska matriser och ger reella tal på ett sådant sätt att determinanten är noll om och endast om matrisen ej är inverterbar.

Tyvärr är teorin för determinanter lite stökig, och vi kommer inte ge några explicita bevis, utan hänvisar för detta till kursboken.

Vi börjar med att definiera determinanten induktivt via så kallad radexpansion längs första raden.

Vi ska alltså definiera

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{för } n \geq 2.$$

(För $n = 1$ definierar vi $\det(a_{11}) := a_{11}$. Vi använder dock ej absolutbeloppstecknet i detta fall. Notera att determinanten inte nödvändigtvis är positiv).

För $n = 2$ definierar vi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Antag nu att vi definierat determinanten för

$(n-1) \times (n-1)$ -matriser.

Då låter vi

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \\
 a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \\
 + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Det är värt att notera att i fallet $n = 2$ är determinanten $\pm$ arean av det parallelogram som radvektorerna i matrisen spänner upp, och om $n = 3$ är den $\pm$ volymen av den parallelepiped som spänns upp av radvektorerna. Man kan också visa att determinanten ges av följande (det är denna definition som används i boken):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{N(p_1, p_2, \dots, p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n},$$

där summan tas över alla **tillåtna produkter** $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$, och $N(p_1, p_2, \dots, p_n)$ är mängden av alla **negativa par** = antalet par (i, j) sådana att $i < j$ men $p_i > p_j$.

(Ett annat sätt att säga detta är att $p_1, p_2, \dots, p_n$ är en permutation av $1, 2, \dots, n$ och $(-1)^{N(p_1, p_2, \dots, p_n)}$ är permutationens tecken.)

Exempel 1

Exempel 1: Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Man kan visa att följande gäller för determinanten.

Sats

- $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ är inverterbar. I detta fall gäller $\det A^{-1} = 1/\det A$,
- $\det(AB) = \det A \det B$,
- $\det A^t = \det A$.
- $\det I_n = 1$, där I_n är identitetsmatrisen.

Vi kan alltså använda definitionen ovan induktivt för att räkna ut determinater, men oftast är detta inte så smidigt. Istället är det bättre att använda följande (eller ofta en kombination av detta och ovanstående definition) som säger hur determinanten påverkas vid elementära radoperationer på matrisen A .

Sats

Om A är en $n \times n$ -matris, då ändras determinanten på följande sätt vid elementära radoperationer på A .

- Multiplicerar vi en rad med en konstant k , då multipliceras även determinanten med k ,
- Läger vi till en konstant multipel av en rad till en annan ändras inte determinanten,
- Byter vi plats på två rader byter determinanten tecken.

Detta kan också användas för att beräkna determinanten. För om A inte är inverterbar då kan vi skapa en nollrad via elementära radoperationer, och alltså blir determinanten noll. Annars kan vi med hjälp av elementära radoperationer gå från A till I_n , och om vi då håller reda på hur alla dessa radoperationer ändrar determinanten, samt använder att $\det I_n = 1$ får vi fram dess värde. Oftast är det dock i praktiken bäst att använda en kombination av radoperationer och radexpansioner som ovan.

Exempel 1': Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sats

Om en kvadratisk matris är på trappstegsform, då ges dess determinant av produkten av diagonalelementen.

Exempel 2: Beräkna

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$