

Linjär Algebra, Föreläsning 13

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Definition

En avbildning (=funktion) F mellan två vektorrum $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ (skrivet $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$) som uppfyller

$$F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\bar{x}) + F(\bar{y}),$$

$$F(k\bar{x}) = kF(\bar{x})$$

för alla vektorer $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{U}$ och skalärer k kallas linjär.

$F(\bar{r}_0 + t\bar{v}) = F(\bar{r}_0) + tF(\bar{v})$ ger att linjer avbildas på linjer eller punkter (det senare om $F(\bar{v}) = \bar{0}$).

Det är också lätt att se att en linjär avbildning uppfyller

$$F(\bar{0}) = \bar{0}.$$

Vidare gäller att om $F, G : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ är linjära, då är även dess summa $F + G$, definierad via $(F + G)(\bar{x}) = F(\bar{x}) + G(\bar{x})$, linjär. Och om $k \in \mathbb{R}$ då är även kF , definierad via $(kF)(\bar{x}) = kF(\bar{x})$ linjär.

D.v.s. mängden av alla linjära avbildningar från $\mathbb{U}$ till $\mathbb{V}$ utgör själva ett vektorrum.

En speciellt viktig linjär avbildning av ett vektorrum på sig själv är identitetsavbildningen I som avbildar varje vektor på sig själv:

$$I(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Andra exempel på linjära avbildningar är rotationer, och projektioner i Euklidiska rum.

Exempel 1: Avgör om $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ via $F(x_1, x_2) = x_1 x_2$ är linjär.

Exempel 2: Visa att om $\mathbb{W}$ är ett delrum till ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$ och vi definierar $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ via $F(\bar{v}) = \bar{v}_{\parallel \mathbb{W}}$, då är F linjär.

Exempel 3: Låt A vara en $r \times k$ -matris och definiera $F : \mathbb{M}_{k \times 1} \rightarrow \mathbb{M}_{r \times 1}$ via

$$F(X) = AX.$$

Visa att F är linjär. (Vi ska nedan se att faktiskt alla linjära avbildningar från $\mathbb{M}_{k \times 1}$ till $\mathbb{M}_{r \times 1}$ är på denna form för en unik matris A .)

Matriser för linjära avbildningar:

Låt $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ vara en linjär avbildning, samt antag att vi valt baser $\underline{u} = (\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \cdots \quad \bar{u}_k)$ samt $\underline{v} = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \cdots \quad \bar{v}_r)$ till $\mathbb{U}$ respektive $\mathbb{V}$.

Då gäller att varje vektor $\bar{u} \in \mathbb{U}$ kan skrivas entydigt på formen $\underline{u}X$, och $F(\bar{u}) = F(\underline{u}X) = \underline{v}Y$ för något unikt Y .

Om vi låter $\underline{v}Y_i = F(\bar{u}_i)$ och skapar matrisen

$$A := \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_k \\ | & | & \cdots & | \end{array} \right),$$

där vi med detta menar att vi sätter in Y_i :a i kolumnerna i A , då gäller att

$$F(\underline{u}X) = \underline{v}AX \text{ för alla } X.$$

Vi säger att F har matrisrepresentation (eller bara matris) A i baserna $\underline{u}, \underline{v}$. Observera att denna i högsta grad beror på båda dessa val av baser.

Så man kan säga att när vi väl valt baser så är linjära avbildningar inget annat än multiplikation med en matris.

Dessutom är det lätt att inse att det bara finns en matris A som uppfyller ovanstående, så vi har alltså en 1 – 1 korrespondans mellan $r \times k$ -matriser och linjära avbildningar från $\mathbb{U}$ till $\mathbb{V}$.

För att se varför ovanstående gäller notera att med

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

då har vi

$$\begin{aligned} F(\underline{u}X) &= F(x_1\bar{u}_1 + x_2\bar{u}_2 + \dots + x_k\bar{u}_k) = \\ &= x_1F(\bar{u}_1) + x_2F(\bar{u}_2) + \dots + x_kF(\bar{u}_k) = \\ &= x_1(\underline{v}Y_1) + x_2(\underline{v}Y_2) + \dots + x_k(\underline{v}Y_k) = \\ &= \underline{v}(x_1Y_1 + x_2Y_2 + \dots + x_kY_k) = \underline{v}(AX) \end{aligned}$$

Exempel 4: Bestäm matrisen till identitetsavbildningen på $\mathbb{R}^3$ i standardbasen.

Exempel 5: Bestäm matrisen till identitetsavbildningen på $\mathbb{R}^3$ i baserna

$$\underline{u} = ((1, 1, 0,) \quad (1, 0, 1) \quad (0, 1, 0))$$

och

$$\underline{v} = ((1, 0, 0,) \quad (0, 1, 0) \quad (0, 0, 1)).$$

Exempel 6: Låt $\lambda \in \mathbb{R}$ vara fixt. Bestäm matrisen till $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ i standardbasen där

$$F(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

Exempel 7: Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara projektion på x_1x_2 -planet. Bestäm matrisen till F i standardbasen.