

Linjär Algebra, Föreläsning 14

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Definition

En avbildning (=funktion) F mellan två vektorrum $\mathbb{U}, \mathbb{V}$ (skrivet $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$) som uppfyller

$$F(\bar{x} + \bar{y}) = F(\bar{x}) + F(\bar{y}),$$

$$F(k\bar{x}) = kF(\bar{x})$$

för alla vektorer $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{U}$ och skalärer k kallas linjär.

Exempel på linjära avbildningar

- Avbildningen $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ som avbildar alla vektorer i $\mathbb{U}$ till nollvektorn i $\mathbb{V}$ är en linjär avbildning.
- En speciellt viktig linjär avbildning av ett vektorrum på sig själv är identitetsavbildningen I som avbildar varje vektor på sig själv:

$$I(\bar{x}) = \bar{x}.$$

- Andra exempel på linjära avbildningar är skalningar, rotationer och projektioner i Euklidiska rum.

Matriser för linjära avbildningar:

Låt $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ vara en linjär avbildning, samt antag att vi valt baser $\underline{u} = (\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \cdots \quad \bar{u}_k)$ samt $\underline{v} = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \cdots \quad \bar{v}_r)$ till $\mathbb{U}$ respektive $\mathbb{V}$.

Då gäller att varje vektor $\bar{u} \in \mathbb{U}$ kan skrivas entydigt på formen $\underline{u}X$, och $F(\bar{u}) = F(\underline{u}X) = \underline{v}Y$ för något unikt Y .

Om vi låter $\underline{v}Y_i = F(\bar{u}_i)$ och skapar matrisen

$$A := \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_k \\ | & | & \cdots & | \end{array} \right),$$

där vi med detta menar att vi sätter in Y_i :a i kolumnerna i A , då gäller att

$$F(\underline{u}X) = \underline{v}AX \text{ för alla } X.$$

Exempel 1

Exempel 1: Antag att $\mathbb{U}$ har en bas $\underline{u} = (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2)$ och $\mathbb{V}$ har en bas $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2)$. Antag vidare att $F : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{V}$ är en linjär avbildning sådan att

$$F(\bar{u}_1) = \underline{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad F(\bar{u}_2) = \underline{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestäm F 's matris A i dessa baser.
- (b) Bestäm bilden av vektorn $\bar{u} = \underline{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exempel 2: Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ges av

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + 4x_3, x_2 + 3x_3).$$

Bestäm F 's matris i standardbaserna.

Exempel 3: Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling genom linjen $x_1 = x_2$. Bestäm F 's matris i standardbasen.

Exempel 4: Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara rotation med vinkel θ moturs. Bestäm F 's matris i standardbasen.

Exempel 5: Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara vridning runt x_3 -axeln. Bestäm F 's matris i standardbasen.

Exempel 6: Låt $\underline{p} = (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3)$ vara en bas till $\mathbb{P}_3$, och låt $F : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3$ ges av

$$F(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3) = 2c_0 + 3(c_1 + c_2)x - c_3x^2 + c_2x^3.$$

Bestäm F 's matris i $\underline{p}$.

Exempel 7: Låt $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\}$. Låt F vara ortogonal projektion på Π och låt G vara spegling genom Π . Bestäm matriserna till F och G i standardbasen.