

Linjär Algebra, Föreläsning 17

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

- **Basbyten:** Antag att vi i **ett** vektorrum $\mathbb{V}$ har två baser $\underline{u} = (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \cdots \ \bar{u}_n)$ och $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n)$.
I så fall kan vi för unikt bestämda reella tal $c_{1i}, \dots, c_{ni}$ ($1 \leq i \leq n$) skriva

$$\bar{v}_i = c_{1i}\bar{u}_1 + c_{2i}\bar{u}_2 + \dots + c_{ni}\bar{u}_n = \underline{u}Y_i.$$

Matrisen

$$T = \left(\begin{array}{c|c|c|c} | & | & \cdots & | \\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n \\ | & | & \cdots & | \end{array} \right) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

kallas övergångsmatrisen från $\underline{v}$ - till $\underline{u}$ -basen.

Rent formellt kommer det vara bekvämt att skriva:

$$\underline{v} = \underline{u}T \Leftrightarrow \underline{u} = \underline{v}T^{-1}.$$

Notera att T^{-1} är övergångsmatrisen från $\underline{u}$ - till $\underline{v}$ -basen.

Vidare gäller att en matris T som är inverterbar alltid avbildar en bas på en bas, så T är en övergångsmatris mellan några baser om och endast om $\det T \neq 0$.

Förhållandet mellan koordinater i de olika baserna ges av att om en vektor $\bar{u} = \underline{v}Y = \underline{u}X$, då gäller att

$$\underline{v}Y = (\underline{u}T)Y = \underline{u}(TY) = \underline{u}X,$$

eller med andra ord

$$X = TY.$$

(Observera att vi alltså får $\underline{u}$ -koordinaterna från $\underline{v}$ -koordinaterna.)

Exempel 1

Exempel 1: Låt $\underline{e}$ vara standardbasen till $\mathbb{R}^3$ och låt

$$\underline{f} = ((1, 1, 0) \quad (1, 0, 1) \quad (1, 0, 0)).$$

Bestäm övergångsmatrisen från $\underline{e}$ - till $\underline{f}$ -basen och från $\underline{f}$ - till $\underline{e}$ -basen.

Bestäm även koordinaterna till vektorerna

$$\bar{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ i } \underline{f}\text{-basen,}$$

och

$$\bar{v} = \underline{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ i } \underline{e}\text{-basen.}$$

Antag nu att vi har tre baser $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ till $\mathbb{V}$ och T_1 är övergångsmatris från $\underline{v}$ till $\underline{u}$ -basen, och T_2 är övergångsmatris från $\underline{w}$ till $\underline{v}$ -basen.
Då är $T = T_1 T_2$ övergångsmatris från $\underline{w}$ till $\underline{u}$ -basen.

Exempel 2: Låt

$$\underline{f} = ((1, 1) \quad (2, 1))$$

och

$$\underline{g} = ((0, 2) \quad (1, 2))$$

vara baser till $\mathbb{R}^2$.

Bestäm övergångsmatrisen från $\underline{g}$ - till $\underline{f}$ -basen.

Om $\underline{u}$ och $\underline{v}$ är ON-baser till ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$, och T är övergångsmatrisen given ovan, då gäller att

$$T^t T = I \quad ,$$

d.v.s. $T^t = T^{-1}$. En matris T som uppfyller detta kallas ortonormal, eller ON-matris. (Kom ihåg att detta innebär att motsvarande avbildning är en isometri.)

Linjära avbildningars matriser i olika baser:

Låt $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ vara linjär och antag att vi har två olika baser $\underline{u}$ och $\underline{v}$ till $\mathbb{V}$ med övergångsmatrix T från $\underline{v}$ till $\underline{u}$ -basen.

Om vi låter A_u respektive A_v vara matrisen svarande mot F i respektive bas (d.v.s. A_u tar en vektors koordinater i $\underline{u}$ -basen till bildens koordinater i $\underline{u}$ -basen, och på samma sätt för A_v) så gäller:

$$A_v = T^{-1}A_uT,$$

för vi har, om $\underline{v}Y = \underline{u}X$,

$$F(\underline{u}X) = \underline{u}A_uX = \underline{v}T^{-1}A_uTY = \underline{v}A_vY.$$

(Om vidare båda baserna är ON-baser kan vi också byta T^{-1} mot T^t i denna formel.)

Notera att

$$\det(A_v) = \det(T^{-1}A_uT) = \det(T^{-1})\det(A_u)\det(T) = \det(A_u),$$

så detta visar att determinanten är basoberoende, och vi tar detta som definition av $\det F$.

Exempel 3: Antag att $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ har matris

$$A_{\underline{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

i standardbasen $\underline{e}$. Låt

$$\underline{f} = ((1, 1) \quad (0, 1)).$$

Bestäm F :s matris $A_{\underline{f}}$ i $\underline{f}$.

Exempel 4: Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara spegling genom planet

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Bestäm F 's matris A_e i standardbasen $\underline{e}$.