

Linjär Algebra, Föreläsning 19

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Eigenvärden, egenvektorer och diagonalisering.

Definition (Eigenvärde, egenvektor)

En linjär avbildning $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ sägs ha ett eigenvärde λ (reellt tal, eventuellt 0) med motsvarande egenvektor $\bar{v} \neq \bar{0}$ (i $\mathbb{V}$) om

$$F(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.$$

Definition (Egenrum)

Om λ är ett eigenvärde till F så kallas mängden

$$\{\bar{v} \in \mathbb{V} : F(\bar{v}) = \lambda \bar{v}\}$$

för egenrummet till eigenvärdet λ .

Egenrummet består alltså av alla egenvektorer plus nollvektorn.
Det är lätt att visa att detta är ett delrum till $\mathbb{V}$.

Diagonaliserbar avbildning

Antag nu att F har n stycken linjärt oberoende egenvektorer $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n)$, och dessa utgör en bas till $\mathbb{V}$, med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (ej nödvändigtvis alla olika).
I så fall gäller

$$A_v = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

d.v.s. A_v är diagonal.

Diagonaliserbar avbildning

Omvänt om A_v är diagonal i någon bas $\underline{v}$ är elementen i denna bas egenvektorer till A , och elementen i diagonalen egenvärdena. Om det finns en bas $\underline{v}$ där A_v är diagonal kallas F diagonaliserbar.

Vi kommer ibland vilja tala om egenvärden/egenvektorer till en $n \times n$ —matris A , och då menar vi att vi ser denna som en linjär avbildning på $\mathbb{M}_{n \times 1}$ i standardbasen.

Exempel 1

Exempel 1: Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ vara spegling genom linjen $x_1 + x_2 = 0$. Bestäm egenvärden till F samt avgör om F är diagonaliserbar.

Eftersom

$$F(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \Leftrightarrow (F - \lambda I)\bar{v} = \bar{0}$$

så har vi att λ är ett egenvärde till F om och endast om $F - \lambda I$ inte är inverterbar,
d.v.s. om och endast om

$$\det(F - \lambda I) = 0.$$

(Kom ihåg att determinanten är basoberoende).

Exempel 2: Låt $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ha matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

i standardbasen.

- (a) Hitta alla egenvärden till F (till A).
- (b) Bestäm egenrummen och hitta om möjligt en bas sådan att F i denna har en diagonal matris.

Sats

Om $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k\}$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ så är de linjärt oberoende. Speciellt om F har $\dim \mathbb{V}$ stycken olika egenvärden, då finns alltid en bas av egenvektorer till F .

Låt $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ vara en linjär avbildning på ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$ med $\dim \mathbb{E} = n$. F kallas ON-diagonaliserbar om det finns en ON-bas i vilken F 's matris är diagonal.

Sats (Spektralsatsen)

F är ON-diagonaliserbar om och endast om F är symmetrisk.

Kom ihåg att F är symmetrisk om och endast om den har en symmetrisk matris i någon ON-bas till $\mathbb{E}$. Om detta gäller har den automatiskt en symmetrisk matris i alla ON-baser till $\mathbb{E}$.

Sats

Om $\bar{u}, \bar{v}$ är egenvektorer svarande mot olika egenvärden till en symmetrisk avbildning F på $\mathbb{E}$, då är $\bar{u}$ och $\bar{v}$ ortogonala.

Något om lösningsmetoder för ovanstående problem.

Givet $F : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ följ dessa steg:

- Bestäm F :s matris A i lämplig bas $\underline{u}$ (ON-bas om vi vill ON-diagonalisera i Euklidiskt rum),
- Hitta nollställena λ till sekularpolynomet:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

vilket ger alla egenvärden till A .

- För varje egenvärde λ bestäm egenrummen $\mathbb{U}_\lambda =$ vektorer med koordinater X som löser

$$(A - \lambda I)X = \vec{0}.$$

Något om lösningsmetoder för ovanstående problem.

- För varje $\mathbb{U}_\lambda$ bestäm en bas till detta delrum (ON-bas om vi ska ON-diagonalisera symmetriskt F),
- F är nu diagonaliserbar (ON-diagonaliserbar) om och endast om vektorerna från föregående steg tillsammans utgör en bas till $\mathbb{V}$, (om vi har valt ON-baser i föregående steg blir detta en ON-bas)
- I denna bas har F diagonal matris med egenvärdena på diagonalen,
- Varje egenvärde förekommer lika många gånger som multipliciteten på nollstället i $p(\lambda)$.

Sats

Antag att A är en $n \times n$ -matris och sekularpolynomet $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ har ett nollställe λ med multiplicitet m , då gäller att egenrummet svarande mot λ har dimension minst 1 och högst m . Vidare är A diagonaliserbar om och endast om

$$p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdot (\lambda_2 - \lambda)^{m_2} \cdots (\lambda_k - \lambda)^{m_k}$$

samt att egenrummen till λ_i har exakt dimension m_i för varje i (där $\lambda_i \neq \lambda_j$ om $i \neq j$).

Exempel 3: Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha matris

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

i standardbasen. Hitta en ON-bas bestående av egenvektorer till F .

Ett annat vanligt problem som ges är att räkna ut A^k för något heltal k . Om $A = T^{-1}DT$ där D är diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

då har vi

$$A^k = (T^{-1}DT)^k = T^{-1}D^kT,$$

och

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$