

Linjär Algebra, Föreläsning 1

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Linjär ekvation (2 obekanta):

$$3x_1 + 2x_2 = 7.$$

Ickelinjär ekvation

$$3 \sin(x_1) + 2x_2 = 7.$$

$$3x_1 + 2x_2 = 7, \quad 3y_1 + 2y_2 = 2 \Rightarrow 3(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) = 7 + 2.$$

$$3x_1 + 2x_2 = 7 \Rightarrow 3(2x_1) + 2(2x_2) = 2 \cdot 7.$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

där $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ obekanta.

Linjärt ekvationssystem (2 ekvationer, 2 obekanta):

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ 4x_1 - 5x_2 = 7 \end{cases}$$

Ickelinjärt ekvationssystem:

$$\begin{cases} 3 \sin(x_1) + 2x_2 = 11 \\ 4x_1 - 5x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right.$$

Lösning till ekvationssystem

Med en lösning till ett ekvationssystem som ovan menar vi en uppsättning reella tal $x_1, x_2, \dots, x_n$ så att när de sätts in i alla ekvationer är **alla** dessa uppfyllda samtidigt.

T.ex. är $x_1 = 3, x_2 = 1$ en lösning till

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 11 \\ 4x_1 - 5x_2 = 7 \end{cases}$$

Radoperation 1: Byta plats på två ekvationer,

Radoperation 2: Multiplicera en ekvation med en konstant $c \neq 0$,

Radoperation 3: Addera en konstant multipel av en ekvation till en annan.

Strategin för att lösa ett linjärt ekvationssystem är att skapa ett system på så kallad trappstegsform enbart med hjälp av radoperationer.

Exempel 1: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 = 8. \end{cases}$$

Exempel 2: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1. \end{cases}$$

Det finns till varje ekvationssystem som ovan endast tre möjligheter:

- Unik lösning,
- Ingen lösning,
- Oändligt många lösningar

Om alla b_i :a är 0 kallas ekvationssystemet för **homogent**.
Ett ekvationssystem som är homogent har alltid minst en lösning, kallad den triviala lösningen: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Exempel 3: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Exempel 4: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 4 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Exempel 5: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Exempel 6: Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

När vi har skapat vår trappstegsform finns exakt tre alternativ:

- lika många nollskilda ekvationer som obekanta, och alla rader med noll på VS har noll på HS $\Rightarrow$ entydig lösning,
- färre nollskilda ekvationer än obekanta, och alla rader med noll på VS har noll på HS $\Rightarrow$ oändligt många lösningar,
- en eller flera ekvationer med noll på VS men ej noll på HS $\Rightarrow$ ingen lösning.

Oändligt antal lösningar

Om antal nollskilda ekvationerna på vänstersidan $<$ antalet obekanta har vi oändligt många lösningar.

Vi måste då införa parametrar på lämpligt sätt. Antalet parametrar som behövs är:

- antalet obekanta - antalet nollskilda rader i vänstersidan (när vi har trappstegsform).