

Linjär Algebra, Föreläsning 20

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

- $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ sägs vara symmetrisk om $(F(\bar{u})|\bar{v}) = (\bar{u}|F(\bar{v}))$ gäller för all $\bar{u}, \bar{v}$ i det Euklidiska rummet $\mathbb{E}$.
- Detta är ekvivalent med att F har en symmetrisk matris i en (i alla) ON-bas till $\mathbb{E}$.
- Om F är symmetrisk så finns det en ON-bas sådan att F har en diagonal matris i denna.

Exempel 1

Exempel 1: Låt $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ha matris

$$A_e = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

i standardbasen $\underline{e}$. Bestäm en ON-bas $\underline{f}$ till $\mathbb{R}^3$ sådan att F har en diagonal matris A_f i denna.

Vi kommer här bara titta på kvadratiska former på $\mathbb{R}^n$ (boken behandlar allmännare Euklidiska rum, men det blir inte någon större skillnad).

En kvadratisk form på $\mathbb{R}^2$ är en funktion $Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ på formen

$$Q(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2.$$

En sådan kan vi med matriser skriva på formen

$$Q(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

I $\mathbb{R}^n$, om vi skriver

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

och betecknar standardbasen med $\underline{e}$, då definierar vi analogt en kvadratisk form att vara en funktion $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ på formen

$$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = Q(\underline{e}X) = X^t A X,$$

där A är symmetrisk (d.v.s. $A = A^t$).

Vi observerar att följande gäller:

- $Q(\underline{e}\lambda X) = \lambda^2 Q(\underline{e}X)$,
- $Q(\underline{e}\bar{0}) = 0$,
- Q är ett polynom som bara innehåller andragstermer,
- Om $X = TY$ då gäller att $Q(\underline{e}X) = Q(\underline{e}TY) = Y^t T^t A T Y$,
och $T^t A T$ är symmetrisk. D.v.s. att vara en kvadratisk form är invariant om vi byter till en ny ON-bas.

Enligt spektralsatsen finns det en ON-bas $\underline{f} = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \dots \ \bar{f}_n)$ till $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (där dessa inte alla behöver vara olika). Vi har då följande resultat:

Sats

Om $\underline{f} = (\bar{f}_1 \ \bar{f}_2 \ \dots \ \bar{f}_n)$ är en ON-bas till $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer till A med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ då gäller att

$$Q(\underline{e}X) = Q(\underline{f}Y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2,$$

där

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

är koordinaterna för $\underline{e}X$ i $\underline{f}$ -basen.

Exempel 2: Ange en ny ON-bas till $\mathbb{R}^2$ sådan att

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$

inte innehåller några blandtermer i denna.

Exempel 3: Ange en ny ON-bas till $\mathbb{R}^3$ sådan att

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$$

inte innehåller några blandtermer i denna.

En kvadratisk form $Q(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ på $\mathbb{R}^n$ sägs vara:

- Positivt definit om $Q(\underline{x}) > 0$ för alla $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- Positivt semidefinit om $Q(\underline{x}) \geq 0$ för alla $\underline{x}$ med likhet för något $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- Negativt definit om $Q(\underline{x}) < 0$ för alla $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- Negativt semidefinit om $Q(\underline{x}) \leq 0$ för alla $\underline{x}$ med likhet för något $\underline{x} \neq \underline{0}$,
- Indefinit om den antar både positiva och negativa värden.

Sats

Om $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ är egenvärdena till A , då gäller att Q är:

- Positivt definit om och endast om alla $\lambda_i > 0$,
- Positivt semidefinit om och endast om alla $\lambda_i \geq 0$ med likhet för något i ,
- Negativt definit om och endast om alla $\lambda_i < 0$,
- Negativt semidefinit om och endast om alla $\lambda_i \leq 0$ med likhet för något i ,
- Indefinit om det finns både positiva och negativa egenvärden.

Att diagonalisera A är också ett effektivt sätt att kontrollera värdena på Q enligt följande sats:

Sats

Om $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ är egenvärdena till A , då gäller att:

- $\lambda_1 |\underline{e}X|^2 \leq Q(\underline{e}X) \leq \lambda_n |\underline{e}X|^2$,*
- λ_1 är det minsta värdet Q antar på $\{|\underline{e}X| = 1\}$, och detta värde antas i de punkter som är egenvektorer till A svarande mot egenvärdet λ_1 ,*
- λ_n är det största värdet Q antar på $\{|\underline{e}X| = 1\}$, och detta värde antas i de punkter som är egenvektorer till A svarande mot egenvärdet λ_n .*

Exempel 4: Bestäm max/min på enhetscirkeln till

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2,$$

samt avgör i vilka punkter dessa värden antas.

En kurva i planet på formen

$$Q(x_1, x_2) = c,$$

där Q är en andragsform och c är en konstant kallas en andragskurva.

Det finns i princip tre typer av kurvor man kan få: Ellipser, parabler eller hyperblar.

(Det finns dock vissa degenererade fall...)

Exempel 5: Beskriv kurvan i $\mathbb{R}^2$ som ges av

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = -1.$$