

Linjär Algebra, Föreläsning 21

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Andragradskurvor och Andragradsytor

Problemet att beskriva andragradskurvor i två dimensioner och andragradsytor i tre dimensioner är analoga.

Här tittar vi bara på fallet med två variabler (d.v.s. andragradskurvor), det med tre behandlas på motsvarande sätt. Givet en andragradsekvation

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 + 2dx_1 + 2ex_2 = f$$

i två variabler (a, b, c, d, e, f reella tal, minst ett av $a, b, c \neq 0$) så vill vi veta vilken typ av geometriskt objekt lösningsmängden till denna utgör i planet.

För enkelhets skull håller vi oss till fallet $d = e = 0$.

Ekvationen kan då skrivas på formen

$$X^t A X = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f.$$

Enligt spektralsatsen finns ON-matris T (d.v.s. $T^t = T^{-1}$) sådan att

$$T^t A T = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

där λ_1, λ_2 är egenvärden till A .

Vi har nu att de nya koordinaterna för $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ges av att

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

I dessa nya koordinater ges alltså ekvationen av:

$$(y_1 \ y_2) T^t A T \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = f.$$

Detta ger att vi blivit av med den blandade andragradstermen, och vi kan nu avgöra vilken typ av kurva det handlar om.

Egenvektorerna ger oss slutligen de så kallade huvudaxlarna/symmetriaxlar så att vi vet hur kurvan ligger i förhållande till det ursprungliga koordinatsystemet.

Huvudtyper av andragradskurvor

Vi har tre huvudtyper av andragradskurvor i planet med x_1, x_2 som symmetriaxlar:

- Ellips: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = 1$,
- Hyperbel: $\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 - \left(\frac{x_2}{b}\right)^2 = \pm 1$,
- Parabel: $x_2 = ax_1^2$ eller $x_1 = ax_2^2$.

Man kan dock även få tomma mängden, en punkt eller två räta linjer.

Exempel 1: Avgör vilken typ av kurva

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 3x_2^2 = 1$$

utgör, samt ange dess symmetriaxlar.

Exempel 2: Avgör vilken typ av yta

$$g(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2\sqrt{2}x_1x_2 + 3x_2^2 + x_3^2 = 1$$

utgör, samt ange dess symmetriaxlar.

Den **homogena** ekvationen

$$y'(t) = ky(t)$$

(eller bara $y' = ky$) har allmän lösning

$$y(t) = Ce^{kt}.$$

Detta följer av att

$$(y(t)e^{-kt})' = y'(t)e^{-kt} - ky(t)e^{-kt} = e^{-kt}(y'(t) - ky(t)) = 0$$

vilket är ekvivalent med att $y(t)e^{-kt} = C$.

Ekvationen $y'(t) = ky(t) + g(t)$ har allmän lösning

$y(t) = Ce^{kt} + y_p(t)$, där $y_p(t)$ är **en** så kallad partikulärlösning.

D.v.s. en fix lösning (utan obestämda parametrar) till ekvationen.

En sådan kan ofta hittas med hjälp av en lämplig ansats.

Parameterkurvor i $\mathbb{R}^n$ och $\mathbb{M}_{n \times 1}$

Om vi får varje koordinat x_i som funktion av tiden $x_i(t)$, då kallar vi $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ (som alltså är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}^n$) för en parameterkurva (linjer på parameterform är ett exempel). Vi kommer nedan anta att alla $x_i(t)$ är kontinuerligt deriverbara funktioner, och vi sätter

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

vilket är en parameterkurva i $\mathbb{M}_{n \times 1}$. Det är uppenbart hur vi adderar två parameterkurvor till varandra, och hur vi multiplicerar med skalär, och dessa utgör då ett vektorrum.

Vi definierar nu

$$X'(t) := \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}.$$

Det är rättfram att visa att vi har

$$(X_1(t) + X_2(t))' = X_1'(t) + X_2'(t),$$

och

$$(cX(t))' = cX'(t).$$

D.v.s. derivation av $X(t)$ är en linjär avbildning. Mer allmänt kan man också med en direkt uträkning (som dock är lite längre) visa att om T är en (konstant) $n \times n$ -matris, då gäller

$$(TX(t))' = TX'(t).$$

Vi antar nu att vi fått ett system av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = c_{11}x_1(t) + c_{12}x_2(t) + \dots + c_{1n}x_n(t) \\ x_2'(t) = c_{21}x_1(t) + c_{22}x_2(t) + \dots + c_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) = c_{n1}x_1(t) + c_{n2}x_2(t) + \dots + c_{nn}x_n(t). \end{cases}$$

Detta är ett homogent system. Man kan även behandla ickehomogena system med liknande metoder som nedan. Detta system kan vi med matrisnotation skriva som

$$X'(t) = CX(t).$$

Antag nu att vi kan diagonalisera C .

D.v.s. att vi kan hitta en ny bas $\underline{f} = \underline{e}T$ (där $\underline{e}$ är standardbasen till $\mathbb{M}_{n \times 1}$) till $\mathbb{M}_{n \times 1}$ bestående av egenvektorer till C , med motsvarande egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Då vet vi att

$$T^{-1}CT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Alltså får vi om $X = TY$

$$X'(t) = (TY(t))' = TY'(t) = CX(t) = CTY(t),$$

eller ekvivalent

$$Y'(t) = T^{-1}CTY(t).$$

Det vill säga vi får systemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) \\ y_2'(t) = \lambda_2 y_2(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) = \lambda_n y_n(t) \end{cases}$$

Detta kan vi lösa direkt: $y_i(t) = C_i e^{\lambda_i t}$.

Detta ger oss alltså $Y(t)$, och sedan har vi $X(t) = TY(t)$ vilket ger oss lösningen till vårt system.

(Observera att vi inte behöver invertera T explicit någonstans i ovanstående uträkningar).

Notera att $X(t) = TY(t)$ ger följande:

Sats

Antag att A är en diagonaliserbar $n \times n$ -matris med egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ och motsvarande bas av egenvektorer $X_1, X_2, \dots, X_n$ (i $\mathbb{M}_{n \times 1}$) då gäller att den allmänna lösningen till

$$X'(t) = AX(t)$$

ges av

$$X(t) = C_1 X_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 X_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + C_n X_n e^{\lambda_n t}$$

där $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

Detta beror helt enkelt på att T har X_i :a i sina kolumner.

Exempel 3: Lös systemet av differentialekvationer:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 4x_1(t) + \sqrt{2}x_2(t) \\ x_2'(t) = \sqrt{2}x_1(t) + 3x_2(t). \end{cases}$$

Exempel 4: Lös systemet av differensekvationer:

$$\begin{cases} a_n = 4a_{n-1} + \sqrt{2}b_{n-1} \\ b_n = \sqrt{2}a_{n-1} + 3b_{n-1} \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0. \end{cases}$$