Linjär Algebra, Föreläsning 3

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Diverse produkter i plan och rum

Vi kommer här införa tre typer av produkter, och vi kommer införa dessa via formler i $\mathbb{R}^n$.
Om vi i ett plan eller rum vill införa dessa kan vi göra detta genom att först välja en lämplig bas $\underline{e}$, och identifiera vektorer med dess koordinater. (T.ex. i ett plan identifierar vi $\underline{e}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ med (a_1, a_2) i $\mathbb{R}^2$).
Det är dock så att vi inte kan välja dessa baser hur som helst, utan det finns krav för att formlerna ska vara rätt.
Mer precist, för skalärprodukten (som är meningsfull i alla dimensioner) måste basen vara en ON-bas, och för kryssprodukten och volymprodukten (som bara är definierade i tre dimensioner) måste basen vara både ON och högerorienterad.

Skalärprodukt

Vi kommer nu i $\mathbb{R}^n$ införa den så kallade skalärprodukten mellan två vektorer. $\mathbb{R}^n$ tillsammans med denna utgör då ett exempel på ett så kallat Euklidiskt rum som vi ska definiera mer allmänt senare i kursen.
Namnet skalärprodukt kommer av att den tar två vektorer och ger en skalär (alltså inte en vektor)!

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \bullet (b_1, b_2, \ldots, b_n) := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n.$$

Vi definierar även längden av en vektor $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ via

$$|(a_1, a_2, \ldots, a_n)| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}.$$

Via Pythagoras sats kan man se att detta verkligen överensstämmer med längden av motsvarande geometriska vektor om vi infört säg ett koordinatsystem i planet som tidigare. **Men detta beror på både att våra basvektorer har längd 1 och att de är ortogonala mot varandra!**

Exempel 1: Givet en ON-bas $\underline{e} = (\overline{e}_1\, \overline{e}_2\, \overline{e}_3)$ till rummet, beräkna $\overline{u} \bullet \overline{v}$ där $\overline{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ och $\overline{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Följande sats gäller för skalärprodukten:

Sats

Om $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w} \in \mathbb{R}^n$ *och* $\lambda \in \mathbb{R}$ *så gäller:*

(a) $\overline{u} \bullet \overline{v} = \overline{v} \bullet \overline{u}$,

(b) $\overline{u} \bullet (\overline{v} + \overline{w}) = \overline{u} \bullet \overline{v} + \overline{u} \bullet \overline{w}$,

(c) $\overline{u} \bullet (\lambda \overline{v}) = (\lambda \overline{u}) \bullet \overline{v} = \lambda(\overline{u} \bullet \overline{v})$,

(d) $\overline{u} \bullet \overline{u} = |\overline{u}|^2$,

(e) $\overline{u} \bullet \overline{u} = 0 \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{0}$.

Ett par olikheter

Följande viktiga olikheter gäller för skalärprodukten:
Schwarz olikhet: $|\bar{x} \bullet \bar{y}| \leq |\bar{x}||\bar{y}|$.
Speciellt gäller $-|\bar{x}||\bar{y}| \leq \bar{x} \bullet \bar{y} \leq |\bar{x}||\bar{y}|$.
Triangelolikheten: $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$.

Geometrisk tolkning av skalärprodukten

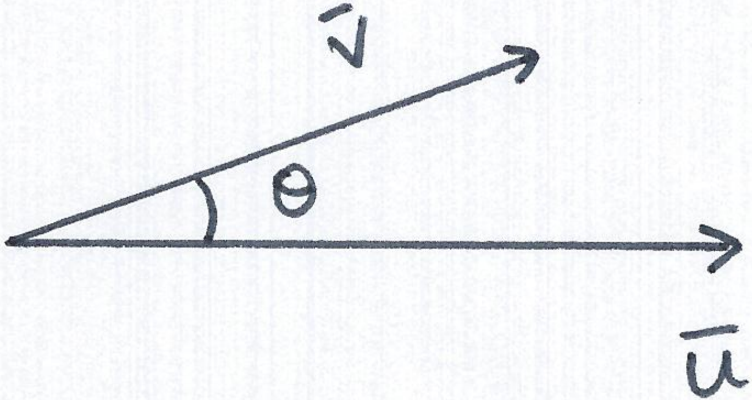
Antag att vi har två nollskilda vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ i $\mathbb{R}^n$, då "definierar" vi vinkeln θ mellan dessa att vara den unika vinkel i intervallet $[0, \pi]$ sådan att

$$\overline{u} \bullet \overline{v} = |\overline{u}||\overline{v}| \cos(\theta).$$

För att se att detta stämmer överens geometriskt antag att de två vektorerna ligger i ett plan där vi infört koordinataxlar som ovan, och antag för enkelhets skull att den ena har koordinaterna $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ där $a_1, a_2 > 0$ och den andra $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (d.v.s. vektorn $\overline{e}_1$).

Vad ovanstående då säger är att vinkeln θ mellan dessa ges av $\cos(\theta) = a_1/\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, d.v.s. närliggande sida genom hypotenusan, vilket vi ju känner igen att det stämmer.

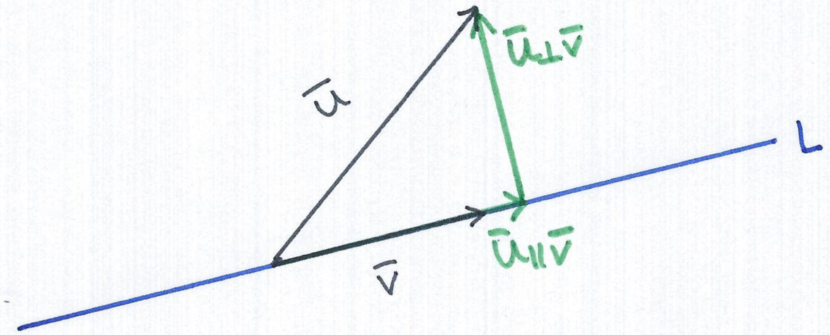
Vi säger också att två vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ är **ortogonala**, skrivet $\overline{u} \perp \overline{v}$, om vinkeln mellan dem är $\pi/2$, d.v.s. om $\overline{u} \bullet \overline{v} = 0$.


$\bar{v}$
θ
$\bar{u}$

Exempel 2

Exempel 2: Givet en ON-bas $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2)$ till planet, beräkna $\overline{u} \bullet \overline{v}$ samt vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$ där $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ortogonal projektion av en vektor på en annan vektor (linje)



Om vi som i bilden ovan har två vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ där $\overline{v} \neq \overline{0}$ då kan vi på entydigt sätt skriva $\overline{u}$ på formen

$$\overline{u} = \overline{u}_{\perp \overline{v}} + \overline{u}_{|| \overline{v}},$$

där $\overline{u}_{\perp \overline{v}}$ är ortogonal mot $\overline{v}$, och $\overline{u}_{|| \overline{v}}$ är parallell med $\overline{v}$.
Detta betyder att $\overline{u}_{|| \overline{v}} = k\overline{v}$ och $\overline{u}_{\perp \overline{v}} = \overline{u} - k\overline{v}$. Så
$(\overline{u} - k\overline{v}) \bullet \overline{v} = 0$, vilket ger $k = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2}$.
Eller

$$\overline{u}_{|| \overline{v}} = \frac{\overline{u} \bullet \overline{v}}{|\overline{v}|^2} \overline{v}.$$

Exempel 3: Givet en ON-bas $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2)$ till planet, beräkna $\overline{u}_{\|\overline{v}}$ där $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ och $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Kryssprodukt (vektorprodukt)

Denna produkt är endast definierad i tre dimensioner.
Vi definierar

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1).$$

Notera alltså att vi tar två vektorer i $\mathbb{R}^3$ och får en ny vektor i $\mathbb{R}^3$.
Om $\overline{u} = k\overline{v}$ då gäller att $\overline{u} \times \overline{v} = \overline{0}$.
$\overline{u} \bullet (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$ och $\overline{v} \bullet (\overline{u} \times \overline{v}) = 0$. Det vill säga kryssprodukten ger en vektor som är ortogonal mot både $\overline{u}$ och $\overline{v}$.

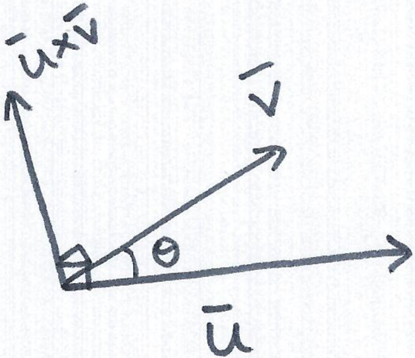
Geometrisk tolkning, högersystem

Vi såg ovan att kryssprodukten av två vektorer $\overline{u}, \overline{v}$ i $\mathbb{R}^3$ gav en ny vektor som är ortogonal mot båda dessa.
Angående storleken kan vi säga att vi har följande

$$|\overline{u} \times \overline{v}| = |\overline{u}||\overline{v}| \sin(\theta),$$

där θ återigen är vinkeln mellan $\overline{u}$ och $\overline{v}$.
Dessutom kan man se att den pekar i den riktning som anges av den så kallade högerhandsregeln. Man säger att $\overline{u}, \overline{v}, \overline{u} \times \overline{v}$ utgör ett så kallat högersystem.

Dessa två egenskaper är enkelt att inse att de karaktäriserar kryssprodukten unikt. Om de två vektorerna $\overline{u}, \overline{v}$ inte är parallella (om de är det är ju kryssprodukten nollvektorn) då finns det ju bara två riktningar att välja på sådana att de är ortogonala mot bägge dessa vektorer.
Storleken ges av formeln ovan, och högerhandsregeln ger oss en av dessa två riktningar.
För att motivera ovanstående påstående, antag för enkelhets skull att $\overline{u} = (1, 0, 0)$ och $\overline{v} = (b_1, b_2, 0)$ med $b_1, b_2 > 0$.
Då gäller enligt ovanstående att $\overline{u} \times \overline{v} = (0, 0, b_2)$. Notera nu att $b_2 = \sin(\theta)\sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sin(\theta)|\overline{v}|$, samt att denna vektor pekar i positiva $\overline{e}_3$-riktningen.
Vidare kan vi säga att uttrycket $|\overline{u}||\overline{v}|\sin(\theta)$ helt enkelt är arean av det parallellogram som " spänns upp" av $\overline{u}$ och $\overline{v}$.


$\bar{u} \times \bar{v}$
$\bar{v}$
θ
$\bar{u}$

Exempel 4: Givet en höger ON-bas $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2\ \overline{e}_3)$ till rummet, beräkna $\overline{u} \times \overline{v}$ samt arean av det parallellogram som dessa spänner upp där $\overline{u} = \underline{e} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ och $\overline{v} = \underline{e} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Trippelprodukt (volymprodukt)

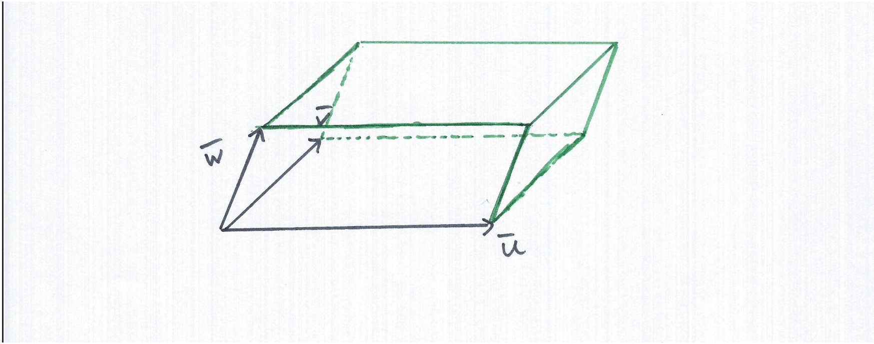
Denna produkt tar tre vektorer och ger ett reellt tal.
Givet tre vektorer $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ i $\mathbb{R}^3$, då är trippelprodukten mellan dessa uttrycket

$$(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w}.$$

Observera att denna produkt alltså beror på ordningen av dessa vektorer. Rent geometriskt är detta tal $\pm$ volymen av den parallellepiped som de tre vektorerna "spänner upp".
Vi har även följande resultat:

Sats

$(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} > 0$ *om och endast om* $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}$ *utgör ett högersystem.*
Om $(\overline{u} \times \overline{v}) \bullet \overline{w} = 0$, *då ligger alla tre vektorer i ett gemensamt plan.*



$\bar{w}$
$\bar{v}$
$\bar{u}$

Exempel 5: Givet en höger ON-bas $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2\ \overline{e}_3)$ till rummet, beräkna volymen av den parallellepiped som spänns upp av $\overline{u}, \overline{v}$ och $\overline{w}$ där $\overline{u} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\overline{v} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$ och $\overline{w} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Exempel 6

Exempel 6: Beräkna $\overline{u} \bullet \overline{v}$ om $|\overline{u}| = 2$, $|\overline{v}| = 3$ och vinkeln θ mellan dem är 60°.

Exempel 7

Exempel 7: Låt $\underline{e} = (\overline{e}_1\ \overline{e}_2)$ vara en ON-bas till planet, och antag att $\overline{w}$ är en enhetsvektor som bildar vinkel $\pi/4$ med $\overline{e}_1$ och vinkel $3\pi/4$ med $\overline{e}_2$. Bestäm $\overline{w}$:s koordinater i $\underline{e}$.

Exempel 8

Exempel 8: Beräkna arean av den triangel i $\mathbb{R}^3$ som har hörn i $(1, -2, 0)$, $(1, 3, 5)$ och $(3, 0, 2)$.