

Linjär Algebra, Föreläsning 4

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Linjer på parameterform i $\mathbb{R}^n$

En linje L i planet/rummet ses enkelt vara unikt bestämd om vi vet en punkt P_0 på den, samt en riktningsvektor $\bar{v}$ som är parallell med denna.

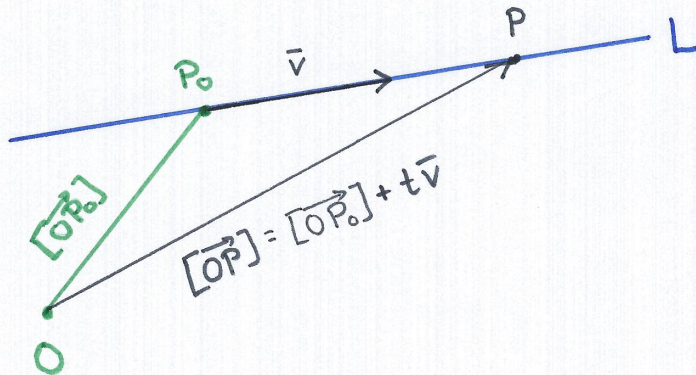
För varje punkt P på L finns då unikt tal t så att

$$[\overrightarrow{OP}] = [\overrightarrow{OP_0}] + t\bar{v},$$

och vidare för varje t gäller att den unika punkt P som uppfyller denna ekvation ligger på L , vilket ger att detta bestämmer L unikt. Om vi uttrycker detta i koordinater, så att vi hamnar i $\mathbb{R}^n$ (då vi nu tillåter även $n > 3$) då motsvaras $[\overrightarrow{OP_0}]$ av någon vektor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\bar{v}$ av $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, och de punkter $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ som ligger på L är de som kan skrivas på formen

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n) + t(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Detta kallas att linjen L är given på **parameterform** (t kallas för parameter).



Exempel 1

Exempel 1: Bestäm en ekvation på parameterform för den linje L i $\mathbb{R}^3$ som går genom punkterna $P = (2, 5, 1)$ och $Q = (3, 7, 4)$. Bestäm även (det kortaste) avståndet mellan linjen L och punkten $R = (3, 6, 2)$, samt ange vilken punkt på L som ligger närmast R .

Om vi har en linje L i $\mathbb{R}^2$, given av $(x_1, x_2) = (a_1, a_2) + t(v_1, v_2)$,
då kan vi om $v_1 \neq 0$ lösa ut

$$x_2 = a_2 + tv_2 = a_2 + \frac{x_1 - a_1}{v_1} v_2 = kx_1 + m.$$

Detta kallas att linjen är given på **riktningskoefficientsform**, och k kallas för riktningskoefficienten.

Notera att $v_1 = 0$ svarar mot att linjen är parallell med x_2 -axeln, och dessa linjer kan inte skrivas på denna form.

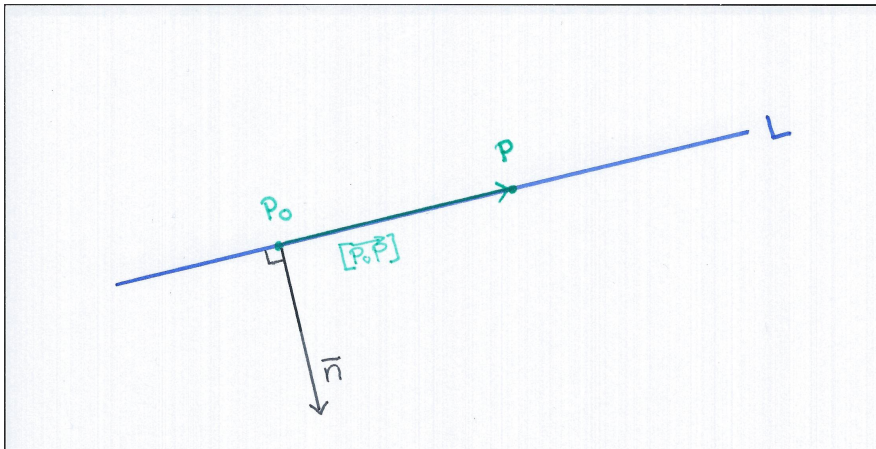
Det är också lätt att se att en linje L i planet är unikt bestämd om vi känner till en normalvektor $\bar{n}$ och en punkt P_0 på linjen. En punkt P ligger då på L om och endast om

$$\bar{n} \bullet \overrightarrow{P_0 P} = 0.$$

Man säger då att linjen L är given på **normalform**.

Om vi är i $\mathbb{R}^2$ och $\bar{n} = (n_1, n_2)$ är normalvektor till L och (a_1, a_2) är en fix punkt på L , då ges alltså linjen av ekvationen

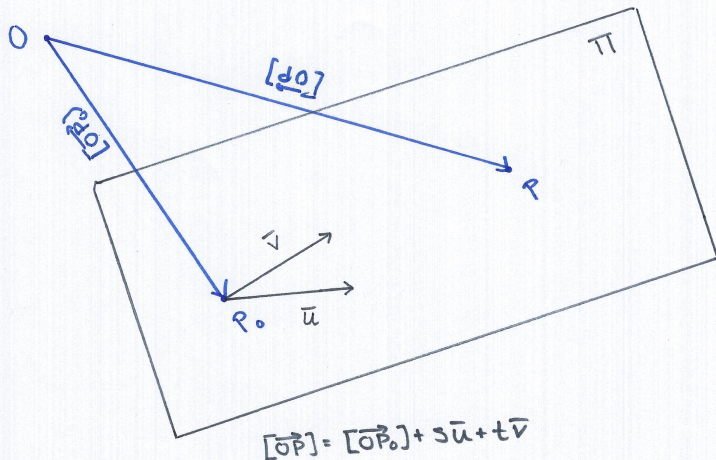
$$(n_1, n_2) \bullet (x_1 - a_1, x_2 - a_2) = 0 \Leftrightarrow n_1 x_1 + n_2 x_2 = n_1 a_1 + n_2 a_2.$$



Exempel 2

Exempel 2: Låt $\underline{e} = (\bar{e}_1 \ \bar{e}_2)$ vara en ON-bas till planet och O vara valt. Bestäm linjen L som går genom de punkter P och Q som i denna bas har koordinater $(2, 3)$ respektive $(4, 7)$ på parameter-, riktningskoefficients- och normalform.

Plan på parameterform i $\mathbb{R}^n$



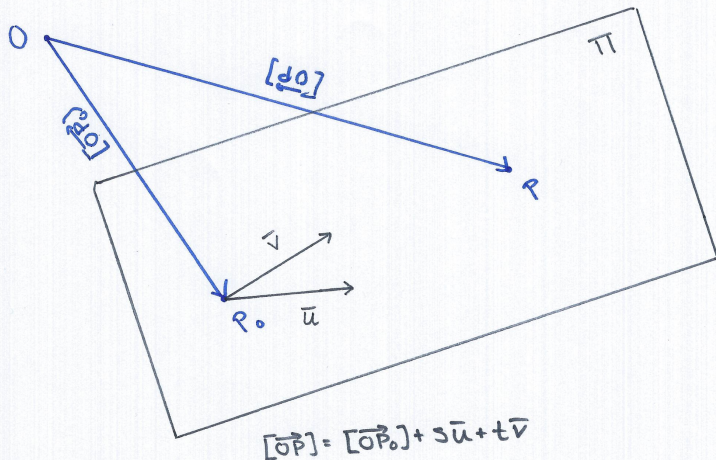
Plan på parameterform i $\mathbb{R}^n$

Ett plan Π i rummet ses enkelt vara bestämt av att vi vet en punkt P_0 i Π samt två vektorer $\vec{u}, \vec{v}$ som är parallella med Π men inte parallella med varandra.

Då ligger en punkt P i Π om och endast om det finns två tal (parametrar) s, t sådana att

$$[\overrightarrow{OP}] = [\overrightarrow{OP_0}] + s\vec{u} + t\vec{v}.$$

Plan på parameterform i $\mathbb{R}^n$



I $\mathbb{R}^n$ kan vi göra motsvarande med koordinater.

Om vi låter $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ vara en fix punkt, och

$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $\bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ där $\bar{u}$ och $\bar{v}$ inte är parallella, då kallar vi mängden av alla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ som uppfyller

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + s(u_1, u_2, \dots, u_n) + t(v_1, v_2, \dots, v_n) \quad s, t \in \mathbb{R}$$

för ett plan på parameterform.

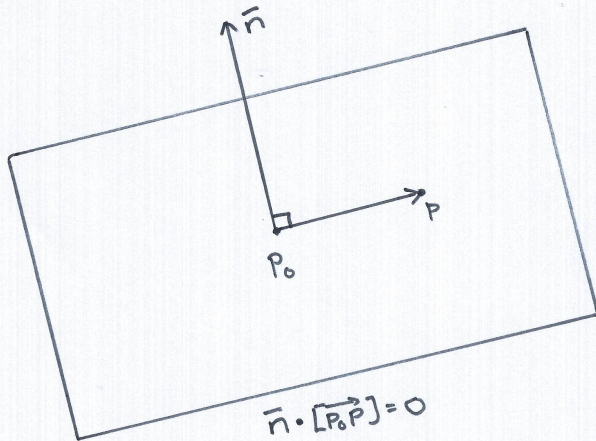
Plan på normalform i $\mathbb{R}^3$

I rummet är det också lätt att se att ett plan Π är unikt bestämt om vi vet en punkt P_0 i Π samt en normalvektor $\bar{n}$. En punkt P ligger då i Π om och endast om $\bar{n} \bullet \overrightarrow{P_0 P} = 0$.

Om vi är i $\mathbb{R}^3$ kan detta i koordinater (precis som för linjer i planet) skrivas som en ekvation

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3,$$

där (n_1, n_2, n_3) är normalvektorn och (a_1, a_2, a_3) en fix punkt i Π .



Exempel 3: Låt Π vara det unika plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkterna $(1, 0, 2)$, $(3, 1, 2)$ samt $(2, 0, 5)$. Låt vidare L vara den linje i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$(x_1, x_2, x_3) = (1, 1, -4) + t(1, 1, 1) \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (a) Bestäm ekvationer för Π på parameter- och normalform.
- (b) Bestäm skärningspunkten mellan L och Π .

Exempel 4: Låt L vara skärningslinjen mellan planen

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

och

$$x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 3.$$

Låt planet Π ges av

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

- (a) Bestäm en ekvation på parameterform för linjen L .
- (b) Bestäm en ekvation på parameterform för Π .
- (c) Bestäm avståndet mellan L och Π .