

Linjär Algebra, Föreläsning 6

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Vektorrum, linjärt oberoende

Definition

Låt $\mathbb{V}$ vara en icke-tom mängd, vars element vi kallar vektorer, sådan att vi definierat två operationer

- Addition av vektorer: $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{V} \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in \mathbb{V}$,
- Multiplikation med skalär: $\lambda \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{V} \Rightarrow \lambda \bar{u} \in \mathbb{V}$.

Om dessa uppfyller följande axiom, då säger vi att $\mathbb{V}$ är ett vektorrum (över $\mathbb{R}$).

- $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$,
- $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$,
- Det finns unikt element $\bar{0} \in \mathbb{V}$ s.a. $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$ för alla $\bar{u} \in \mathbb{V}$,
- Till varje $\bar{u} \in \mathbb{V}$ finns unik additiv invers $-\bar{u}$ s.a.
 $\bar{u} + (-\bar{u}) =: \bar{u} - \bar{u} = \bar{0}$,
- $1\bar{u} = \bar{u}$,
- $\lambda(\mu\bar{u}) = (\lambda\mu)\bar{u}$,
- $(\lambda + \mu)\bar{u} = \lambda\bar{u} + \mu\bar{u}$,
- $\lambda(\bar{u} + \bar{v}) = \lambda\bar{u} + \lambda\bar{v}$.

OBS! Det är lätt att kontrollera att följande gäller

$$\bar{u} + \bar{v} = \bar{u} \Rightarrow \bar{v} = \bar{0},$$

$$0\bar{u} = \bar{0},$$

$$-\bar{u} = -1\bar{u}.$$

Observera också att begrepp som längd, vinkel etc. inte har någon innebörd i ett allmänt vektorrum.

Exempel

Det är lätt att verifiera att $\mathbb{R}^n$ som vi definierat tidigare utgör ett vektorrum.

Likaså utgör mängden $\mathbb{M}_{r \times k}$ bestående av alla $r \times k$ -matriser ett vektorrum.

Slutligen, om vi låter $\mathbb{P}_n$ beteckna alla polynom av grad högst n , d.v.s. alla polynom på formen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, då utgör detta ett exempel på ett vektorrum. Addition/multiplikation med skalär är i detta fall definierat som följer:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) =$$

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n,$$

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \dots + (\lambda a_n)x^n.$$

Definition

En icke-tom delmängd $\mathbb{U}$ till $\mathbb{V}$ kallas ett delrum (underrum) till $\mathbb{V}$ om $\mathbb{U}$ med samma operationer som de i $\mathbb{V}$ själv är ett vektorrum. D.v.s. $\mathbb{U}$ är ett delrum om och endast om

- (a) $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{U} \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in \mathbb{U}$,
- (b) $\lambda \in \mathbb{R}, \bar{u} \in \mathbb{U} \Rightarrow \lambda \bar{u} \in \mathbb{U}$.

Exempel

*Självklart är varje vektorrum ett delrum till sig själv, och dessutom är det så kallade **nollrummet** till $\mathbb{V}$ som bara består av nollvektorn ett delrum till $\mathbb{V}$.*

Exempel 1

Exempel 1: Låt $V = \mathbb{R}^3$ och $U = \{(x_1, x_2, 0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$. Visa att U är ett delrum till V .

Exempel 2: Låt $V = \mathbb{R}^3$ och

$U = \{(x_1, 0, 0) : x_1 \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, x_2, 0) : x_2 \in \mathbb{R}\}$. Avgör om U är ett delrum till V .

Exempel 3: Låt $\mathbb{V} = \mathbb{R}^2$ och $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$. Avgör om $\mathbb{U}$ är ett delrum till $\mathbb{V}$.

Det är ganska lätt att se att ett delrum till $\mathbb{R}^2$ antingen måste vara nollrummet, **en** linje genom origo eller hela rummet.

På samma sätt är ett delrum till $\mathbb{R}^3$ antingen nollrummet, **en** linje genom origo, **ett** plan genom origo eller hela rummet.

Definition

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n \in \mathbb{V}$. Om $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ då kallas vektorn

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

för en linjärkombination av vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$.

Mängden av alla linjärkombinationer av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ kallas det **linjära höljet** till $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ och betecknas

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n].$$

OBS! Det är lätt att kontrollera att det linjära höljet $[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$ utgör ett delrum till $\mathbb{V}$, vidare är det det minsta delrummet som innehåller alla vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$.

Vi säger också att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ **spänner upp** delrummet $\mathbb{U}$ om $[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n] = \mathbb{U}$.

T.ex. har vi $\mathbb{R}^n = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n]$ där $\bar{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ... Dessa kallas standardbasen till $\mathbb{R}^n$.

Sats

$$\bar{v}_n \in [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1}] \Rightarrow [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{n-1}] = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n].$$

Exempel 4: Beskriv $[(1, 0, 1)]$ samt $[(1, 0, 1), (0, 1, 2)]$ geometriskt.

Exempel 5: Reducera antalet vektorer som beskriver det linjära höljet $[(1, 1, 1), (2, 1, 0), (3, 2, 1), (4, 3, 2)]$ till så få vektorer som möjligt.