

Linjär Algebra, Föreläsning 7

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Linjärkombinationer (repetition)

- Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ vara vektorer i ett vektorrum $\mathbb{V}$.
- Givet skalärer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ så kallas

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

för en linjärkombination av vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$.

- Mängden av alla sådana linjärkombinationer kallas det linjära höljet till $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$, och betecknas

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n].$$

- Det är det minsta delrummet till $\mathbb{V}$ som innehåller alla dessa vektorer.

Exempel 1: Beskriv $[(0, 1, 1), (1, 0, 2), (1, 1, 3)]$ geometriskt.

Definition

Om den så kallade beroendeeckvationen

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, då sägs vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ vara linjärt oberoende.

Det är lätt att kontrollera att standardbasen till $\mathbb{R}^n$ är linjärt oberoende t.ex.

Det är också lätt att se att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ är linjärt beroende om och endast om det finns en vektor $\bar{v}_j$ sådan att mängden $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_n$ spänner upp samma rum som alla $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$.

Exempel 2: Avgör om

$(2, 0, 1, 1), (1, 0, 2, 3), (1, 1, 0, 2), (2, -1, 3, 2)$ i $\mathbb{R}^4$ är linjärt oberoende.

Exempel 3: Avgör om

$2 + x^2 + x^3, 1 + 2x^2 + 3x^3, 1 + x + 2x^3, 2 - x + 3x^2 + 2x^3$ i $\mathbb{P}_3$ är linjärt oberoende.

Definition

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum. En ordnad uppsättning vektorer $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n)$ kallas för en bas till $\mathbb{V}$ om

- (1) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ är linjärt oberoende,
- (2) $\mathbb{V} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$.

Ibland skriver vi bara att $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ eller $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ är en bas till $\mathbb{V}$ utan att använda matrisnotationen $\underline{v}$ som ovan. Det är dock viktigt att tänka på att en bas alltid är ordnad.

Exempel 4: Bestäm en bas till

$$\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Vi kommer använda notationen

$$\underline{v}X = \underline{v} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} := a_1 \bar{v}_1 + a_2 \bar{v}_2 + \dots + a_n \bar{v}_n$$

om $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

D.v.s. vi använder detta skrivsätt för att skriva linjärkombinationer med basvektorerna i $\underline{v}$.

Notera också att detta stämmer överens med hur vi definierat matrismultiplikationen om $\underline{v}$ hade varit en vanlig radmatris.

Sats

En uppsättning vektorer $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ i ett vektorrum $\mathbb{V}$ är en bas om och endast om **varje** vektor $\bar{v} \in \mathbb{V}$ på **entydigt** sätt kan skrivas på formen

$$\bar{v} = \underline{v}X,$$

där $\underline{v} = (\bar{v}_1 \quad \bar{v}_2 \quad \dots \quad \bar{v}_n)$.

Kolumnmatrisen X kallas för koordinaterna till $\bar{v}$ i basen $\underline{v}$.

(Notera att koordinaterna påverkas av ordningen på basvektorerna, och det är därför det är viktigt att ha dem ordnade).

Alla vektorrum har inte ändliga baser (vi definierar inte oändliga baser i denna kurs ...), t.ex. har rummet av alla kontinuerliga funktioner på ett givet intervall inte någon ändlig bas. Men i denna kurs kommer vi i princip uteslutande vara intresserad av de vektorrum som har ändliga baser.

Standardbasen till $\mathbb{R}^n$ är enkel att visa att den utgör en bas till $\mathbb{R}^n$.

Exempel 5: Visa att $\underline{u} = (1 \quad 1+x \quad x+x^2)$ utgör en bas till $\mathbb{P}_2$, samt bestäm koordinaterna till $2 + 3x + 5x^2$ i denna bas.

Sats

Om ett vektorrum $\mathbb{V}$ har en bas $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n)$, då har alla andra baser till $\mathbb{V}$ också n element. Vi säger då att $\mathbb{V}$ har dimension $\dim \mathbb{V} = n$.

Per definition sätter vi också $\dim\{\bar{0}\} = 0$.

Sats

En mängd vektorer i $\mathbb{V}$ som har fler element än $\dim \mathbb{V}$ är linjärt beroende.

Om å andra sidan en mängd vektorer i ett ändligdimensionellt vektorrum är linjärt oberoende, då finns en bas som innehåller dessa som element.

Exempel 6: Bestäm en bas samt dimensionen till

$$\mathbb{U} = [(2, 1, 0, 1), (1, 0, 2, 3), (1, 1, -2, -2), (3, 1, 2, 4)] \subset \mathbb{R}^4.$$

Utvidga sedan denna bas till en bas till hela $\mathbb{R}^4$.