

Linjär Algebra, Föreläsning 8

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Linjärkombinationer (repetition)

- Låt $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ vara vektorer i ett vektorrum $\mathbb{V}$.
- Givet skalärer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ så kallas

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n$$

för en linjärkombination av vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$.

- Mängden av alla sådana linjärkombinationer kallas det linjära höljet till $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$, och betecknas

$$[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n].$$

- Det är det minsta delrummet till $\mathbb{V}$ som innehåller alla dessa vektorer.

Linjärt oberoende/baser (repetition)

Definition

Om den så kallade beroendeeckvationen

$$\lambda_1 \bar{v}_1 + \lambda_2 \bar{v}_2 + \dots + \lambda_n \bar{v}_n = \bar{0}$$

endast har den triviala lösningen $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, då sägs vektorerna $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ vara linjärt oberoende.

Definition

Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum. En ordnad uppsättning vektorer $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ kallas för en bas till $\mathbb{V}$ om

- (1) $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ är linjärt oberoende,
- (2) $\mathbb{V} = [\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n]$.

Linjärt oberoende/baser (repetition)

- En uppsättning vektorer $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n)$ i ett vektorrum $\mathbb{V}$ är en bas om och endast om **varje** vektor $\bar{v} \in \mathbb{V}$ på **entydigt** sätt kan skrivas på formen

$$\bar{v} = \underline{v}X.$$

- Om ett vektorrum $\mathbb{V}$ har en bas $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \cdots \ \bar{v}_n)$, då har alla andra baser till $\mathbb{V}$ också n element. Vi säger då att $\mathbb{V}$ har dimension $\dim \mathbb{V} = n$.
Per definition sätter vi också $\dim\{\bar{0}\} = 0$.
- En mängd vektorer i $\mathbb{V}$ som har fler element än $\dim \mathbb{V}$ är linjärt beroende.
Om å andra sidan en mängd vektorer i ett ändligdimensionellt vektorrum är linjärt oberoende, då finns en bas som innehåller dessa som element.

Exempel 1: Bestäm en bas till

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{M}_{2 \times 2}.$$

Låt $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ och låt

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Låt vidare A vara en $m \times n$ -matris.

Vi kallar då mängden

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : AX = 0\}$$

för Lösningsrummet till det linjära ekvationssystemet

$$AX = 0.$$

- Eftersom
$$AX = 0, AY = 0 \Rightarrow A(X + Y) = AX + AY = 0 + 0 = 0$$
samt
$$AX = 0 \Rightarrow A(kX) = kAX = 0$$
ser vi att detta blir ett delrum till R^n .
- Notera dock att det är viktigt att ekvationssystemet är homogent.
- För att ta fram en bas till ett sådant behöver vi bara lösa systemet på parameterform, skriva lösningen på vektorform och bryta ut parametrarna.
- De vektorer som då står efter parametrarna blir automatiskt en bas.

Exempel 2: Bestäm en bas till

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) : \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Från linjärt hölje till Lösningsrum

Givet en bas $\underline{v} = (\bar{v}_1 \ \bar{v}_2 \ \dots \ \bar{v}_n)$ till ett vektorrum $\mathbb{V}$, samt vektorer $\bar{u}_i = \underline{v} Y_i$ för $i = 1, 2, \dots, m$, där

$$Y_i = \begin{pmatrix} y_{1i} \\ y_{2i} \\ \vdots \\ y_{ni} \end{pmatrix}.$$

Det linjära höljat $[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]$ är då per definition

$$[\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m] = \left\{ \underline{v} X \in \mathbb{V} : \begin{array}{l} \text{det finns skalärer } c_i \text{ s.a.} \\ X = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \dots + c_n Y_n \end{array} \right\},$$

där

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Detta leder till ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Om vi ställer upp detta systems totalmatris:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1m} & x_1 \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2m} & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nm} & x_n \end{array} \right),$$

om vi då gör radoperationer så att vi får en trappstegsform på vänstersidan, då blir kraven för att lösning ska finnas exakt att vi har noll i högersidan på de rader där vi har nollrader på vänstersidan.

Detta tar oss alltså från det linjära höljet till rummet skrivet som ett Lösningsrum.

Exempel 3: Skriv

$\mathbb{U} = [(2, 1, 0, 1), (1, 0, 2, 3), (1, 1, -2, -2), (3, 1, 2, 4)] \subset \mathbb{R}^4$ som ett lösningsrum till ett linjärt ekvationssystem.

Om vi på ett systematiskt sätt vill utvidga en bas för ett delrum $\mathbb{U} \subset \mathbb{V}$ till hela rummet $\mathbb{V}$, då ser vi först till att vi skriver $\mathbb{U}$ som ett lösningsrum, med ett ekvationssystem med linjärt oberoende rader. För enkelhets skull jobbar vi nedan med fallet $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, men det är lätt att anpassa nedanstående till andra $\mathbb{V}$.

$$\mathbb{U} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \right\}.$$

Låt oss kalla ekvationen $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0$ för ekvation i .

Så rummet $\mathbb{U}$ är mängden som uppfyller alla ekvationer $1 - m$.

Låt $\mathbb{U}_1$ beteckna det rum som uppfyller ekvation $2 - m$.

Eftersom vi antagit att ekvationerna är linjärt oberoende (d.v.s. kastar vi bort en finns det automatiskt fler lösningar) om vi då har en bas $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k$ till $\mathbb{U}$ och väljer en vektor $\bar{u}_{k+1}$ som uppfyller ekvation $2 - m$ **men inte** ekvation 1, då blir mängden $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}$ automatiskt linjärt oberoende (eftersom $\bar{u}_{k+1}$ inte ligger i $\mathbb{U}$), så det blir en bas till $\mathbb{U}_1$.

Fortsätter vi genom att låta $\mathbb{U}_2$ beteckna rummet som uppfyller ekvation $3 - m$, och väljer u_{k+2} som uppfyller ekvation $3 - m$ men inte ekvation 2 (ekvation 1 spelar ingen roll längre) så har vi utvidgat till en bas till $\mathbb{U}_2$.

Fortsätter vi på detta sätt tills alla ekvationer är slut har vi fått en bas till hela $\mathbb{V}$.

Exempel 4: Bestäm en bas till

$\mathbb{U} = [(2, 1, 0, 1), (1, 0, 2, 3), (1, 1, -2, -2), (3, 1, 2, 4)] \subset \mathbb{R}^4$, samt utvidga denna bas till hela $\mathbb{R}^4$.

Exempel 5: Bestäm en bas till

$$\mathbb{U} = [2 + x + x^2 - 3x^3 + x^4, 2 - x + 2x^2 + x^3] \subset \mathbb{P}_4.$$

Utvidga sedan denna bas till en bas till hela $\mathbb{P}_4$.