

Linjär Algebra, Föreläsning 9

Tomas Sjödin

Linköpings Universitet

Vi ska nu införa en extra struktur på vektorrum, en så kallad skalärprodukt, vilken vi kan använda för att definiera längd och vinklar m.m. som inte har någon mening i ett allmänt vektorrum.

Definition

En skalärprodukt på ett vektorrum $\mathbb{E}$ är en funktion som tar två vektorer $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{E}$ och ger ett reellt tal $(\bar{u}|\bar{v})$, och som uppfyller följande för alla $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{E}, \lambda \in \mathbb{R}$:

- $(\bar{u}|\bar{v}) = (\bar{v}|\bar{u})$,
- $(\bar{u}|\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u}|\bar{v}) + (\bar{u}|\bar{w})$,
- $(\bar{u}|\lambda\bar{v}) = \lambda(\bar{u}|\bar{v})$,
- $(\bar{u}|\bar{u}) \geq 0$ med likhet om och endast om $\bar{u} = \bar{0}$.

$\mathbb{E}$ tillsammans med $(\cdot|\cdot)$ kallas för ett Euklidiskt rum.

$\mathbb{R}^n$ (och $\mathbb{M}_{n \times 1}$) tillsammans med standardskalärprodukten $\bullet$ som vi definierat tidigare är ett Euklidiskt rum. Detta rum betecknas även ibland $\mathbb{E}^n$.

Vidare är det klart att ett delrum $\mathbb{U}$ till ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$ automatiskt är ett Euklidiskt rum med samma skalärprodukt som i $\mathbb{E}$.

I ett Euklidiskt rum $\mathbb{E}$ definierar vi även följande begrepp via skalärprodukten:

- Längd/norm: $|\bar{u}| = \sqrt{(\bar{u}|\bar{u})}$,
- Avstånd: $d(\bar{u}, \bar{v}) = |\bar{u} - \bar{v}|$,
- $\bar{u}, \bar{v}$ ortogonala om $(\bar{u}|\bar{v}) = 0$,
- Vinkeln θ mellan $\bar{u}, \bar{v} \neq \bar{0}$ definieras att vara den unika vinkel i $[0, \pi]$ s.a. $\cos \theta = \frac{(\bar{u}|\bar{v})}{|\bar{u}||\bar{v}|}$.

Vidare har vi följande resultat:

Pythagoras sats: $(\bar{u}|\bar{v}) = 0 \Rightarrow |\bar{u} + \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2$.

Cauchy-Schwarz olikhet: $|(\bar{u}|\bar{v})| \leq |\bar{u}||\bar{v}|$.

Triangelolikheten: $|\bar{u} + \bar{v}| \leq |\bar{u}| + |\bar{v}|$.

Vi kan också precis som i $\mathbb{R}^n$ införa den ortogonala projektionen av en vektor $\bar{u}$ på en vektor $\bar{v} \neq \bar{0}$ att vara den unika vektor $\bar{u}_{||\bar{v}}$ som är parallell med $\bar{v}$ och sådan att $\bar{u}_{\perp\bar{v}} := \bar{u} - \bar{u}_{||\bar{v}}$ är ortogonal mot $\bar{v}$. Samma formel som i $\mathbb{R}^n$ (med samma argument som i $\mathbb{R}^n$ för att få fram den) gäller även här:

$$\bar{u}_{||\bar{v}} = \frac{(\bar{u}|\bar{v})}{|\bar{v}|^2} \bar{v}.$$

Definition

$\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m\}$ i ett Euklidiskt rum kallas en ON-mängd (ortonormal mängd) om

$$(\bar{u}_i | \bar{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Om $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \cdots \ \bar{u}_m)$ dessutom är en bas då kallas den en ON-bas.

Notera att detta säger att en ON-mängd består av vektorer med längd 1 och som är parvis ortogonala mot varandra.

Sats

En ON-mängd i ett Euklidiskt rum är alltid linjärt oberoende

Normalt är det just ON-baser som är "rätt" baser att jobba med i Euklidiska rum, som följande sats förklarar.

Sats

Om $\underline{u} = (\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \cdots \ \bar{u}_m)$ är en ON-bas till det Euklidiska rummet $\mathbb{E}$, då gäller följande för skalärprodukten:

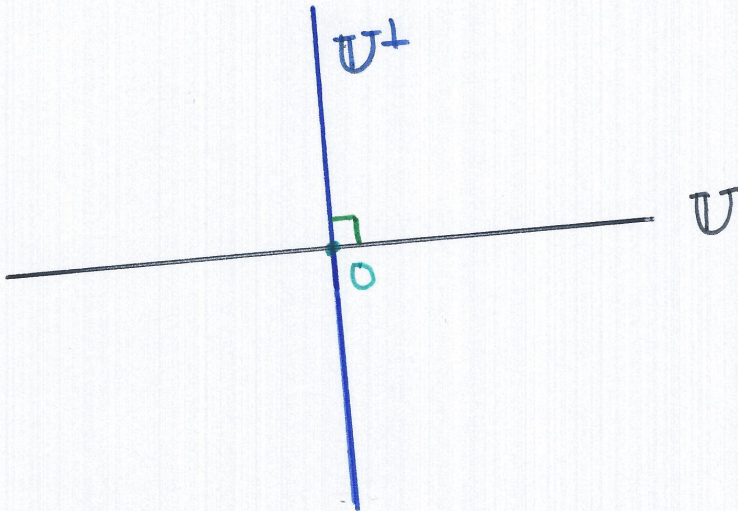
$$\left(\underline{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \middle| \underline{u} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m.$$

D.v.s. när vi väl uttrycker allt i en ON-bas så är skalärprodukten samma som i $\mathbb{R}^m$.

Definition

Om $\mathbb{U}$ är ett delrum till det Euklidiska rummet $\mathbb{E}$, då definierar vi det ortogonala komplementet till $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U}^{\perp} = \{\bar{v} \in \mathbb{E} : (\bar{v}|\bar{u}) = 0 \quad \text{för alla } \bar{u} \in \mathbb{U}\}.$$



Det är lätt att kontrollera att $\mathbb{U}^\perp$ också är ett delrum till $\mathbb{E}$.

Sats

Om $\mathbb{U} = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m]$ då gäller att

$$\mathbb{U}^\perp = \{\bar{v} \in \mathbb{E} : (\bar{v} | \bar{u}_i) = 0 \quad \text{för alla } i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Sats

Om $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \cdots \ \bar{u}_m)$ är en ON-bas till delrummet $\mathbb{U}$ i $\mathbb{E}$, då gäller att

$$\bar{u}_{||\mathbb{U}} := (\bar{u}|\bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{u}|\bar{u}_2)\bar{u}_2 + \dots + (\bar{u}|\bar{u}_m)\bar{u}_m \in \mathbb{U},$$

$$\bar{u}_{\perp\mathbb{U}} := \bar{u} - \bar{u}_{||\mathbb{U}} \in \mathbb{U}^\perp.$$

Vi kallar $\bar{u}_{||\mathbb{U}}$ den ortogonala projektionen av $\bar{u}$ på $\mathbb{U}$.

OBS! Notera att uppdelningen $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$ där $\bar{v} \in \mathbb{U}$, $\bar{w} \in \mathbb{U}^\perp$ är unik.

Notera även att om vi tillämpar satsen med $\mathbb{U} = \mathbb{E}$ säger den att om $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \cdots \ \bar{u}_m)$ är en ON-bas till $\mathbb{E}$ då gäller

$$\bar{u} = (\bar{u}|\bar{u}_1)\bar{u}_1 + (\bar{u}|\bar{u}_2)\bar{u}_2 + \dots + (\bar{u}|\bar{u}_m)\bar{u}_m.$$

Gram-Schmidts metod

Gram-Schmidts metod tar en bas till ett Euklidiskt rum och skapar en ON-bas utifrån denna som följer.

Låt $(\bar{u}_1 \ \bar{u}_2 \ \cdots \ \bar{u}_m)$ vara en bas till det Euklidiska rummet $\mathbb{E}$ (alltså inte nödvändigtvis en ON-bas).

Skapa nu vektorer $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_m$ som följer:

$$\bar{e}_1 := \bar{u}_1 / |\bar{u}_1|,$$

$$\bar{e}_2 := \bar{v}_2 / |\bar{v}_2| \text{ där } \bar{v}_2 := \bar{u}_2 - (\bar{u}_2 | \bar{e}_1) \bar{e}_1,$$

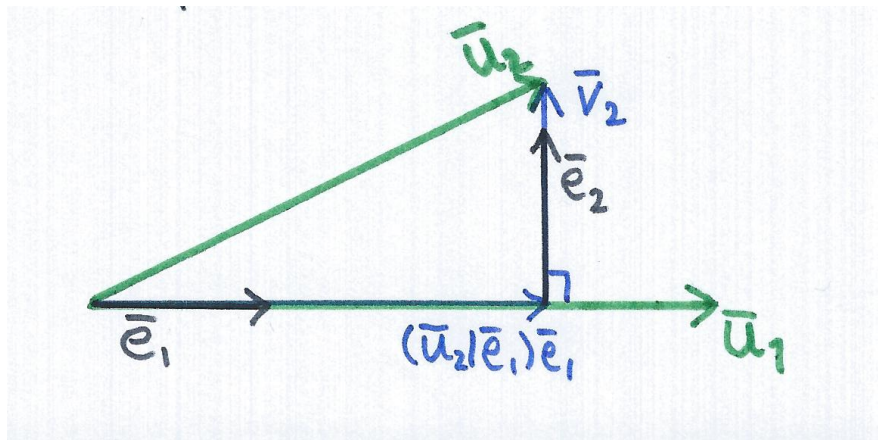
$$\vdots$$

$$\bar{e}_m := \bar{v}_m / |\bar{v}_m| \text{ där}$$

$$\bar{v}_m := \bar{u}_m - (\bar{u}_m | \bar{e}_1) \bar{e}_1 - (\bar{u}_m | \bar{e}_2) \bar{e}_2 - \dots - (\bar{u}_m | \bar{e}_{m-1}) \bar{e}_{m-1}$$

Denna bas uppfyller också följande för varje $j = 1, 2, \dots, m$:

$$[\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_j] = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_j].$$



Om det är så att man har en mängd vektorer $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_m$ som man bara vet genererar $\mathbb{E}$, men ej nödvändigtvis är linjärt oberoende kan man använda ovanstående metod också för att skapa en ON-bas med den skillnaden att om man i något steg får ett $\bar{v}_j$ som är nollvektorn så kastar man helt enkelt bort den.

Exempel 1

Exempel 1: Låt $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.
Bestäm en ON-bas till $\mathbb{U}$ samt beräkna $\bar{u}_{\parallel \mathbb{U}}$ och $\bar{u}_{\perp \mathbb{U}}$ då
 $\bar{u} = (1, 1, 2)$.

Exempel 2

Exempel 2: Låt $\bar{u}_1 = (1, 1, 0, 0)$, $\bar{u}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\bar{u}_3 = (0, 0, 1, 1)$, $\bar{u}_4 = (0, 0, 0, 1)$ i $\mathbb{R}^4$. Låt vidare

$$U_1 = [\bar{u}_1], \quad U_2 = [\bar{u}_1, \bar{u}_2], \quad U_3 = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3].$$

Skapa en ON-bas $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$ till $\mathbb{R}^4$ sådan att

$$U_1 = [\bar{e}_1], \quad U_2 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2], \quad U_3 = [\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3].$$