Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: KTR1

Kontrollskrivning i TATA24 Linjär Algebra

2022-10-26 kl 08.00–12.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska **endast svar** *ges. De ska lämnas på ett* **gemensamt papper** *och ger högst 1 poäng per uppgift.*

Uppgift 7–9 ger högst 3 poäng per uppgift. Till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För godkänd kontrollskrivning krävs minst 10 poäng totalt. Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som uppgift 1–3 på tentamen.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Finn alla lösningar till ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ -x - 3y + z = 2, \\ 2x + y + 5z = -23. \end{cases}$

2. Bestäm avståndet mellan punkten $A = (1, 2, 3)$ och linjen $\ell = \{(1 + t, 1 - t, 5 + 2t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$.

3. Låt $\mathbf{u} = (3, -2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 1, -5)$. Hitta samtliga vektorer i $\mathbb{R}^3$ av längd 1 som är ortogonala mot både $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

4. Låt a vara en parameter och sätt
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & a-5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestäm, om möjligt, alla värden på a sådana att $B = A^{-1}$.

5. Bestäm koordinaterna för polynomet $3 + 4x \in \mathbb{P}_1$ med avseende på (den ordnade) basen $\begin{pmatrix} 1+x & 1-x \end{pmatrix}$.

6. Bestäm en ekvation på normalform för planet som innehåller punkten $A = (1, 0, 1)$ och linjen
$$\ell : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

---

7. Betrakta det linjära höljet $\mathbf{U} = [(1, 1, -1, 2), (4, -2, 5, 5)] \subseteq \mathbb{R}^4$ och låt $\mathbf{v} = (-3, 5, -2, 5)$. Skriv $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ med $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U}$, $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{U}^{\perp}$, dvs $\mathbf{v}_2$ skall vara ortogonal mot allt i $\mathbf{U}$.

8. Låt
$$\mathbf{U}_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0\},$$
$$\mathbf{U}_2 = [(1, 1, 1, 2), (1, 0, 1, 0), (3, 1, 3, 2)],$$
dvs $\mathbf{U}_1$ är ett lösningsrum och $\mathbf{U}_2$ är ett linjärt hölje. Ange en bas för snittet $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$.

9. Låt ℓ beteckna avståndet mellan punkterna $P = (1, 2, 3)$ och $Q = (-2, -4, 4)$. Planet Π uppfyller att avståndet från P till Π är $\ell/3$, att avståndet från Q till Π är $2\ell/3$ samt att P och Q ligger på olika sidor om Π. Ange en ekvation för Π på normalform.