Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: KTR1

Kontrollskrivning i TATA24 Linjär Algebra

2024-10-29 kl 08.00–12.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska **endast svar** *ges. De ska lämnas på ett* **gemensamt papper** *och ger högst 1 poäng per uppgift.*

Uppgift 7–9 ger högst 3 poäng per uppgift. Till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

*För godkänd kontrollskrivning krävs minst **9** poäng totalt. Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som uppgift 1–3 på tentamen.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Finn alla lösningar till ekvationssystemet
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5. \end{cases}$$

2. Bestäm (det minsta) avståndet mellan punkten $(2,2,1)$ och planet som ges av $x+y-3z=5$.

3. Låt $\mathbf{u} = (2,-2,3)$, $\mathbf{v} = (3,1,1)$. Hitta samtliga vektorer i $\mathbb{R}^3$ som är ortogonala både mot $\mathbf{u}$ och mot $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.

4. Låt a vara en parameter och sätt
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & a \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} a & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Bestäm, om möjligt, alla värden på a sådana att $B = A^{-1}$.

5. Bestäm koordinaterna för $(2,2,1) \in \mathbb{R}^3$ med avseende på den ordnade basen
$$\big((2,0,0) \quad (1,1,0) \quad (1,0,-1)\big).$$

6. Låt ℓ vara linjen som ges av $(x_1,x_2,x_3) = (1-t, 2+2t, 3t)$, $t \in \mathbb{R}$. Bestäm en ekvation, på normalform, för det plan som innehåller ℓ och som innehåller punkten $(2,1,1)$.

---

7. Betrakta det linjära höljet $\mathbf{U} = [(1,-1,0,0),(0,1,-1,0)] \subseteq \mathbb{R}^4$ och låt $\mathbf{v} = (2,-2,3,1)$. Finn $\mathbf{v}_1 \in \mathbf{U}$ och $\mathbf{v}_2 \in \mathbf{U}^\perp$ sådana att $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

8. Definiera två delrum till $\mathbb{P}_3$ enligt
$$\mathbf{U}_1 = \left\{ a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{P}_3 \; : \; \begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a + 2b + 4c + 8d = 0 \end{cases} \right\},$$
$$\mathbf{U}_2 = [x-2, x^2-2x] \subseteq \mathbb{P}_3.$$
Ange en bas för snittet $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{U}_2$.

9. Låt $p_1 = 1 + x \in \mathbb{P}_1$, $p_2 = 2 - x \in \mathbb{P}_1$. Då är $\underline{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \end{pmatrix}$ en bas för $\mathbb{P}_1$. Det finns en unik skalärprodukt $(\cdot|\cdot)$ på $\mathbb{P}_1$ så att $\underline{\mathbf{p}}$ blir en ON-bas, d.v.s. så att
$$(p_1|p_1) = (p_2|p_2) = 1, \qquad (p_1|p_2) = 0.$$
Beräkna $(5 - x \,|\, 7 + x)$, d.v.s. värdet av denna specifika skalärprodukt evaluerad på detta par av vektorer i $\mathbb{P}_1$.