Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Algebra, geometri och diskret matematik

Utbildningskod: TATA24
Modul: KTR1

Kontrollskrivning i TATA24 Linjär algebra

2025-10-28 kl 8.00-12.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På uppgift 1–6 ska **endast svar** *ges. De ska lämnas på ett* **gemensamt papper** *och ger högst 1 poäng per uppgift.*

Uppgift 7–9 ger högst 3 poäng per uppgift. Till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För godkänd kontrollskrivning krävs minst ~~9~~ 8 poäng totalt.
Godkänd kontrollskrivning tillgodoräknas som uppgift 1–3 på tentamen.

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

1. Hitta minstakvadratlösningarna till $AX = B$ då

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. Lös

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

3. Bestäm kortaste avståndet mellan punkten $(2, 2, 2)$ och linjen

$$\ell = \{(1, 1, 1) + t(1, 0, 1) \,:\, t \in \mathbb{R}\}.$$

4. Lös matrisekvationen $XA = 3B$ då $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Låt $\mathbf{u} = (1, 2, 2, 2) \in \mathbb{R}^4, \mathbf{v} = (2, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Bestäm ortogonala projektionen av $\mathbf{u}$ på $[\mathbf{v}]$.

6. Låt $\mathbf{u} = (1, 0, 2) \in \mathbb{R}^3$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{R}^3$ sådan att ett av baselementen är parallellt med $\mathbf{u}$.

Var god vänd!

7. Låt

$$U = [(1,3,5,0),(2,-1,0,1)] \subseteq \mathbb{R}^4,$$
$$V = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : -7x_1 + 14x_2 + 15x_3 - 5x_4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Avgör om $U^\perp \subseteq V$.

8. (a) Visa att $U = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + 2x_2 = 0\}$ inte är ett delrum till $\mathbb{R}^2$.
   (b) Antag att W är ett vektorrum samt att U och V båda är delrum till W. Visa att snittet $U \cap V$ är ett delrum till W.

9. Låt Π vara planet som har ekvationen

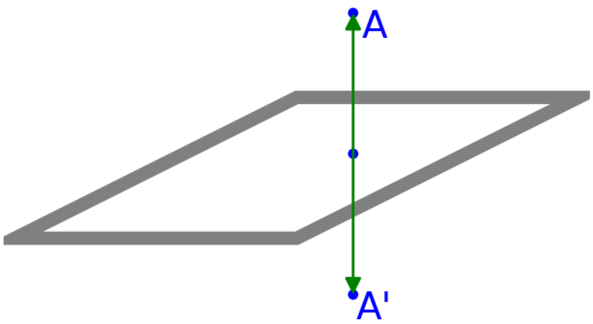
$$-3x + y + 2z = -7.$$

Låt A vara punkten $(2,1,6)$ och B punkten $(4,-2,0)$.

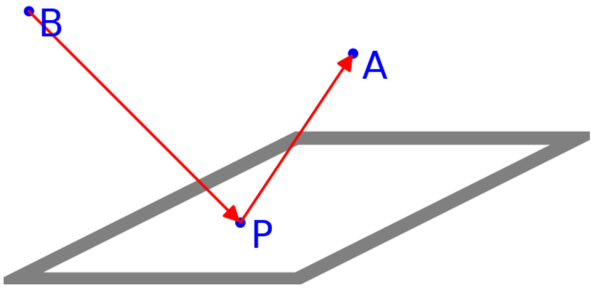
(a) Hitta *spegelbilden* av A relativt planet (se figur).

(b) Denna deluppgift är felaktig! Punkterna A och B ligger på olika sidor om Π. Deluppgiften utgår, maxpoängen på skrivningen blir 14, och gränsen för godkänt 8. (Den som påtalat felet eller kommit med en lösning som skulle fungera om uppgiften ej vore trasig belönas ändå.)

Om en ljusstråle emitteras från B och sedan *speglas* i planet, varefter den når punkten A, så är den punkt P i vilken strålen speglas i planet unikt bestämd. Ange P.



Figur 1: Spegelbild



Figur 2: Speglad stråle