TATA24, KONTROLLSKRIVNING 2019-10-22
SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. $(x, y, z) = (3 + 3t, -1 - 2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$

2. $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{30}}$

3. $(5, -1, -1)$

4. Koordinatmatrisen är $\dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. $5x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 1$

6. $\dfrac{1}{2}(3, 0, 1, 2)$

7. Vi söker minstakvadratlösningarna till ekvationssystemet $\begin{cases} -k + m = 1, \\ m = 1, \\ k + m = 2, \\ 2k + m = 4. \end{cases}$

Normalekvationen är $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ med den enda lösningen $(k, m) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

Svar: $y = x + \dfrac{3}{2}$.

8. Ekvationen kan skrivas $X(A - 2I) = B$, där I betecknar identitetsmatrisen med samma format som A, alltså 2×2. Vi har

$$(A - 2I)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $A - 2I$ är inverterbar, är ursprungsekvationen ekvivalent med $X = B(A - 2I)^{-1}$. Således:

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: $X = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

9. Ett godtyckligt element i $\mathbb{U}_1$ kan skrivas $\mathbf{u} = (\lambda_1, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 - \lambda_2, 2\lambda_1 - \lambda_2)$ för $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Villkoret för att $\mathbf{u}$ ska tillhöra $\mathbb{U}_2$ är $\mathbf{u} \bullet (-1, 1, -2, 1) = 0 \Leftrightarrow -3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ vilket gäller om och endast om $(\lambda_1, \lambda_2) = (2s, 3s)$, $s \in \mathbb{R}$. Således gäller $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2 = \{s(2, 7, 3, 1) \mid s \in \mathbb{R}\}$ och $(2, 7, 3, 1)$ utgör en bas.

Alternativt kan $\mathbb{U}_1$ och $\mathbb{U}_2$ beskrivas som lösningsrum. Man kan direkt läsa av att $\mathbb{U}_2$ är lösningsrummet till $-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$. En standardkalkyl (se kursboken) visar att $\mathbb{U}_1$ är lösningsrummet till ekvationssystemet $\begin{cases} -5x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

Systemet som består av alla tre ekvationerna har $\mathbb{U}_1 \cap \mathbb{U}_2$ som lösningsrum. Gausselimination levererar systemets lösningar: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = s(2, 7, 3, 1)$, $s \in \mathbb{R}$.

Svar: $((2, 7, 3, 1))$.