Svar, TATA24, 2020-11-01

1. $\begin{cases} x = -3 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$

2. $x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 5$

3. $\dfrac{\sqrt{35}}{2}$

4. $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$

5. $-2, 3, -2$

6. $(-1, 2, 1, 1)$

---

7. $\bar{u}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\bar{u}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Gram-Schmidt: $\bar{f}_1 = \bar{u}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$\bar{f}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2}\bar{f}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-28}{14}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{f}_3 = \bar{u}_3 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2}\bar{f}_1 - \frac{\bar{u}_3 \cdot \bar{f}_2}{|\bar{f}_2|^2}\bar{f}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{14}{14}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Normering ger: <u>Svar:</u> $\frac{1}{\sqrt{14}}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{10}}\underline{e}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

8. $\mathbb{U}$ som lösningsrum:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x_1 \\ 1 & 2 & 1 & x_2 \\ -1 & 4 & 1 & x_3 \\ 1 & -5 & -2 & x_4 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & x_1 \\ 0 & 2 & -2 & -x_1 + x_2 \\ 0 & 0 & 8 & 3x_1 - 2x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 + 5x_3 + 4x_4 \end{array}\right).$$

Så $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 ;\ x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0\}$.

Bas för $\mathbb{V}$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$ ger:

$\begin{cases} x_1 = -5s - 4t, \\ x_2 = 2s + t, \\ x_3 = s, \\ x_4 = t. \end{cases}$ så $\mathbb{V}$ har basen $\underline{e}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{e}\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbb{V}$:s basvektorer tillhör $\mathbb{U}$: $-5 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 = 0$, och $-4 + 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 0$, så:

<u>Svar:</u> $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{U}$.

9. l_1 har riktningsvektor $\bar{v}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$, och

l_2 —— " —— $\bar{v}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix}-1\\-2\\3\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

För att Π inte ska skära l_1 eller l_2 måste en normalvektor $\bar{n}$ för Π vara ortogonal mot $\bar{v}_1$ och $\bar{v}_2$.

Sätt $\bar{n} = \bar{v}_1 \times \bar{v}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix}10\\-7\\-1\end{pmatrix}$. Π ges alltså av ekvationen

$10x_1 - 7x_2 - x_3 = C$ för något $C \in \mathbb{R}$.

Punkten $(2,2,-1)$ på l_1 ger $C = 7$ (så alla punkter på l_1 ger $C = 7$), och punkten $(1,1,2)$ på l_2 ger $C = 1$, så l_1 och l_2 ligger på varsin sida om Π om $1 < C < 7$, t.ex. om $C = 2$.

Svar: $10x_1 - 7x_2 - x_3 = 2$.