Svar, TATA24, 2021-10-26

1. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases}$

2. $\frac{1}{3\sqrt{2}}(-1,4,1)$

3. $(5,1,6)$

4. $-x_1+2x_2+3x_3 = 3$

5. $5, -1$

6. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

---

7. Sätt $\bar{u}_1 = (1,2,-1,1)$, $\bar{u}_2 = (1,-3,5,-4)$. Då ger $\bar{f}_1 = \bar{u}_1$ och $\bar{f}_2 = \bar{u}_2 - \frac{\bar{u}_2 \cdot \bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2}\bar{f}_1 = (3,1,3,-2)$ en ortogonal bas $(\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ för U.

Projektionsformeln ger $\bar{v}_{\parallel U} = \frac{\bar{v}\cdot\bar{f}_1}{|\bar{f}_1|^2}\bar{f}_1 + \frac{\bar{v}\cdot\bar{f}_2}{|\bar{f}_2|^2}\bar{f}_2 =$

$= \frac{7}{7}(1,2,-1,1) + \frac{23}{23}(3,1,3,-2) = (4,3,2,-1).$

Svar: $(4,3,2,-1)$.

8. Låt $U = [\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4]$ och $\bar{v} = (6,-1,2,-5)$.

Ekvationen $\lambda_1\bar{u}_1 + \lambda_2\bar{u}_2 + \lambda_3\bar{u}_3 + \lambda_4\bar{u}_4 = \bar{v}$ ger totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & 2 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Pivotelement i kolumn 1 och 2, parametrar på λ_3 och λ_4, så $(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ är en bas för U, och lösningar finns.

Svar: a) $((2,-1,-2,3)\ (3,-1,-1,1))$.

b) 2.

c) Ja.

9. En normalvektor till det plan Π som innehåller $(-3,-3,-9)$ och l_1: $((3,1,3)-(-3,-3,-9))\times(1,0,1) = (4,6,-4)$.

Π ges alltså av $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = C$, där $C = 2\cdot3 + 3\cdot1 - 2\cdot3 = 3$.

l_2 skär Π då $2(2+t) + 3\cdot t - 2\cdot 2t = 3$, dvs då $t = -1$, vilket ger skärningspunkten $(1,-1,-2)$. Så linjen genom $(-3,-3,-9)$ med riktningsvektor $(1,-1,-2)-(-3,-3,-9) = (4,2,7)$ (ej $\parallel$ med l_1) skär både l_1 och l_2.

Svar: $(x_1, x_2, x_3) = (-3+4t, -3+2t, -9+7t)$, $t \in \mathbb{R}$.