TATA24, KS 2024-10-29

SVAR & LÖSNINGSSKISSER

1) $\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 3x_1+x_2+x_3+x_4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ -2x_2+4x_3+4x_4=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-s-t+2 \\ x_2=2s+2t-1 \\ x_3=s \\ x_4=t \end{cases} \quad (s,t\in\mathbb{R})$

2) Linjen ℓ som ges av $(x,y,z)=(2+t,2+t,1-3t)$ innehåller $A=(2,2,1)$ och är ortogonal mot det givna planet. Den skär planet i punkten $B=(\frac{26}{11},\frac{26}{11},-\frac{1}{11})$, dvs då $t=\frac{4}{11}$. Det sökta avståndet är alltså $|\overline{AB}|=\left|\underline{e}\begin{pmatrix}-4/11\\-4/11\\12/11\end{pmatrix}\right|=\frac{4}{11}\sqrt{11}=\frac{4}{\sqrt{11}}$.

3) De sökta vektorerna är $t\,\bar{u}\times(\bar{u}+v)$, $t\in\mathbb{R}$.

$\bar{u}\times(\bar{u}+\bar{v})=\underline{e}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}\times\underline{e}\begin{pmatrix}5\\-1\\4\end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix}-5\\7\\8\end{pmatrix}$. (Anm. $\bar{u}\times(\bar{u}+\bar{v})=\bar{u}\times\bar{v}$.)

Svar: $(-5t,7t,8t)$, $t\in\mathbb{R}$.

4) $AB=I \Leftrightarrow a-2=1 \Leftrightarrow a=3$

5) $\lambda_1(2,0,0)+\lambda_2(1,1,0)+\lambda_3(1,0,-1)=(2,2,1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2, \\ \lambda_2=2, \\ \lambda_3=-1. \end{cases}$

Svar: $\frac{1}{2}, 2, -1$

6) Låt $P=(2,1,1)$ och $Q=(1,2,0)\in\ell$. Då är $\overline{PQ}=\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ och ℓ:s riktningsvektor $\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$ parallella med planet, som därför har $\bar{n}=\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}\times\underline{e}\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}=\underline{e}\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$ som normalvektor. Således ges planet av $5x_1+4x_2-x_3=d$ för något d. P ligger i planet, så $d=13$. Svar: $5x_1+4x_2-x_3=13$.

7) Gram-Schmidt ger en ortogonal bas för U:

$\bar{b}_1 = (1,-1,0,0)$, $\bar{b}_2 = (0,1,-1,0) - \frac{(-1)}{2}(1,-1,0,0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, 0)$.

Projicera:

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_{/\!/U} = \frac{\bar{v} \cdot \bar{b}_1}{|\bar{b}_1|^2}\bar{b}_1 + \frac{\bar{v} \cdot \bar{b}_2}{|\bar{b}_2|^2}\bar{b}_2 = (2,-2,0,0) - (1,1,-2,0) = \underline{\underline{(1,-3,2,0)}}.$$

$$\bar{v}_2 = \bar{v} - \bar{v}_1 = \underline{\underline{(1,1,1,1)}}.$$

8) Ett godtyckligt element i U_2 är

$$f(x) = \lambda_1(x-2) + \lambda_2(x^2-2x) = -2\lambda_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2)x + \lambda_2 x^2 + 0x^3.$$

Det tillhör U_1 omm $\begin{cases} -2\lambda_1 + (\lambda_1 - 2\lambda_2) + \lambda_2 + 0 = 0 \\ -2\lambda_1 + 2(\lambda_1 - 2\lambda_2) + 4\lambda_2 + 8 \cdot 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$

dvs omm $\lambda_1 = -\lambda_2$. Således gäller $U_1 \cap U_2 = [x-2-(x^2-2x)]$, så en bas för $U_1 \cap U_2$ är $\underline{\underline{(-2+3x-x^2)}}$.

9) Eftersom $\underline{p}$ är en ON-bas, så gäller $\left(\underline{p}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \middle| \underline{p}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Vi har $5-x = \underline{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ och $7+x = \underline{p}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, så

$$(5-x \mid 7+x) = \left(\underline{p}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \underline{p}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = \underline{\underline{7}}$$