TATA24, KS 2025-10-28

SVAR OCH LÖSNINGSSKISSER

1. Normalekv. är $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\iff \begin{cases} 14x_1 + 28x_2 = 14 \\ 28x_1 + 56x_2 = 28 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 1-2t \\ x_2 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$

<u>Svar</u>: $X = \begin{pmatrix} 1-2t \\ t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. Totalmatris: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. <u>Svar</u>: $\begin{cases} x_1 = -t \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

3. Med $A = (1,1,1)$, $B = (2,2,2)$ och $\bar{v} = \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ blir det sökta avståndet

$\left| \overline{AB} - \overline{AB}_{/\!/\bar{v}} \right| = \left| \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underline{e}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|$. <u>Svar</u>: 1

4. $XA = 3B \iff X = 3BA^{-1} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{6}\right)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$.

<u>Svar</u>: $X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\bar{u}_{/\!/[\bar{v}]} = \dfrac{(1,2,2,2)\cdot(2,1,1,1)}{4+1+1+1}(2,1,1,1)$. <u>Svar</u>: $\frac{8}{7}(2,1,1,1)$

6. Låt (exempelvis) $\bar{b}_1 = \frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2)$ och $\bar{b}_2 = (0,1,0)$.

Tag sedan $\bar{b}_3 = \bar{b}_1 \times \bar{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)$.

<u>Svar</u>: $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1,0,2) \quad (0,1,0) \quad \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1) \right)$

7. $U^{\perp} = \left\{ (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\} = \cdots = [(5,10,-7,0), (-3,1,0,7)]$.

Testa om $U^{\perp}$:s generatorer uppfyller ekvationen för V:

- $-7\cdot 5 + 14\cdot 10 + 15\cdot(-7) - 5\cdot 0 = -35 + 140 - 105 = 0$, ja
- $-7\cdot(-3) + 14\cdot 1 + 15\cdot 0 - 5\cdot 7 = 21 + 14 - 35 = 0$, ja

<u>Svar</u>: Ja, $U^{\perp} \subseteq V$.

8. a) $(2,-2) \in U$ eftersom $2^2 + 2\cdot(-2) = 0$.

$2(2,-2) \notin U$ eftersom $4^2 + 2\cdot(-4) \neq 0$.

Alltså är U inte slutet under multiplikation med skalär. $\square$

b) Vi behöver visa (i) $\bar{0} \in U \cap V$,

(ii) $\lambda\bar{x} \in U\cap V$ för alla $\lambda \in \mathbb{R}, \bar{x} \in U \cap V$,

(iii) $\bar{x}+\bar{y} \in U \cap V$ för alla $\bar{x}, \bar{y} \in U \cap V$.

(i) $\bar{0} \in U$ och $\bar{0} \in V$, så $\bar{0} \in U \cap V$, OK.

(ii) $\lambda\bar{x} \in U$ och $\lambda\bar{x} \in V$ (ty U och V är delrum), så $\lambda\bar{x} \in U \cap V$, OK.

(iii) $\bar{x}+\bar{y} \in U$ och $\bar{x}+\bar{y} \in V$ (ty U och V är delrum), så $\bar{x}+\bar{y} \in U \cap V$, OK.

$\square$

9. a) En normalvektor till Π är $\bar{n} = \underline{e}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}$. För spegelbilden A' gäller $\overline{OA'} = \overline{OA} - 2\overline{QA}_{/\!/\bar{n}}$, där Q är en punkt på Π.

Med $Q = (0,-7,0)$ fås $\overline{OA'} = \underline{e}\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix} - 2\,\frac{-6+8+12}{9+1+4}\,\underline{e}\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} = \underline{e}\begin{pmatrix}8\\-1\\2\end{pmatrix}$.

Svar: $(8,-1,2)$

b) Denna deluppgift är trasig eftersom A och B ligger på olika sidor om planet Π. (Idén var annars att hitta P som skärningen mellan Π och linjen genom A' och B.) Uppgiften utgår och poänggränsen sänks; se tentabladet på hemsidan. Den som påtalat felet eller gjort som ovan beskrivits belönas för det.