Svar, TATA24, 2020-01-16

1. $(0,2,0)$

2. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. $\underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$

5. $\frac{3}{5}, \frac{4}{5}$

6. $1, 8$

---

7. Ekvationer för $N(F)$ (och samtidigt beroendeekv. för $F(\bar{e}_1), \dots, F(\bar{e}_4)$:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right), \text{ vilket ger}$$

$$\begin{cases} x_1 = -3(-t) - t = 2t \\ x_2 = -t \\ x_3 = t \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

så en bas för $N(F)$ är $(2,-1,1,0)$.

$V(F)$ spänns upp av $F(\bar{e}_1), \dots, F(\bar{e}_4)$, och trappformen ger att $F(\bar{e}_3)$ är onödig, så en bas för $V(F)$ är

$(1,-1,2)$, $(3,-2,1)$, $(2,-1,2)$.

(Alltså är $V(F) = \mathbb{R}^3$, så vilken bas som helst för $\mathbb{R}^3$ ger ett alternativt svar.)

8. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$. Egenvärden och egenvektorer till A:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 8 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1, 3.$$

$\lambda = 3$: $\left(\begin{array}{cc|c} -4 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. $\lambda = 1$: $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Med $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ fås $AT = TD$, så $A = TDT^{-1}$,

vilket ger: $A^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix} T^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 3^n & 1 \\ -4\cdot 3^n & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2\cdot 3^n + 4 & -3^n + 1 \\ 8\cdot 3^n - 8 & 4\cdot 3^n - 2 \end{pmatrix}.$$

9. $Q(\underline{e}X) = 2x_1^2 + 8x_1x_3 + 3x_2^2 + 8x_3^2 = X^tAX$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Egenvärden och egenvektorer till A:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2-10\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 3, 10.$$

$\lambda=0$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\lambda=3$: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \end{array}\right)$ ger $t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda=10$: $\begin{pmatrix} -8 & 0 & 4 \\ 0 & -7 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ger $t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normering ger ON-basen $\underline{f}$:

a) Sätt $\bar{f}_1 = \underline{e}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 0 \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, $\bar{f}_2 = \underline{e}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{f}_3 = \underline{e}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$. Med $T = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ fås $\underline{f} = \underline{e}T$

och $AT = TD$, där $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, så $T^tAT = D$, vilket ger:

$$Q(\underline{f}Y) = Q(\underline{e}TY) = (TY)^tA(TY) = Y^tT^tATY = 3y_2^2 + 10y_3^2.$$

b) $Q(\underline{f}Y) = 0 \Leftrightarrow 3y_2^2 + 10y_3^2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = t,\ y_2 = y_3 = 0$, där $t \in \mathbb{R}$,

så Q:s nollställen är $t\bar{f}_1$, $t \in \mathbb{R}$, dvs $\underline{e}\begin{pmatrix} 2s \\ 0 \\ -s \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

10. a) F är isometrisk om $|F(\bar{u})| = |\bar{u}|$ för alla $\bar{u} \in V$.

b) Om $\lambda \in \mathbb{R}$ är ett egenvärde till F finns ett $\bar{u} \neq \bar{0}$ s.a. $F(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$. Då fås $|\bar{u}| = |F(\bar{u})| = |\lambda\bar{u}| = |\lambda||\bar{u}|$, så $|\lambda| = 1$, vilket ger att $\lambda = 1$ eller $\lambda = -1$.

c) Antag att $\bar{u} \neq \bar{0}$, att $F(\bar{u}) = \lambda\bar{u}$ (där $\lambda = \pm 1$) och att $(\bar{u}|\bar{v}) = 0$. Då fås $0 = (\bar{u}|\bar{v}) =$ / F isometrisk / $= (F(\bar{u})|F(\bar{v})) = (\lambda\bar{u}|F(\bar{v})) = \lambda(\bar{u}|F(\bar{v}))$, så $(\bar{u}|F(\bar{v})) = 0$,

dvs $F(\bar{v})$ är ortogonal mot $\bar{u}$.