TATA24, TENTAMEN 2020-03-16: SVAR OCH KORTFATTADE LÖSNINGSSKISSER

1. Normalekvationen är $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ med lösningarna $x_1 = 5/14$, $x_2 = 3/7$.

Svar: $x_1 = \frac{5}{14}$, $x_2 = \frac{3}{7}$.

2. Svar: $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

3. Svar: $3x_1 + x_2 + x_3 = 6$.

4. Svar: Egenvärdena är 2 och 3 med egenrummen $[(1,0,0)]$ respektive $[(1,1,1)]$.

5. Svar: -6.

6. Låt $\mathbf{f}_1 = (1,3)$ och $\mathbf{f}_2 = (3,-1)$. Eftersom $\mathbf{f}_1$ är en normalvektor och $\mathbf{f}_2$ en riktningsvektor till linjen, gäller $F(\mathbf{f}_1) = \mathbf{0}$ och $F(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_2$.

Svar: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Systemets koefficientmatris har egenvärdena -3 och 9 med tillhörande egenrum som spänns upp av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Därför är systemets allmänna lösning

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{9t},$$

för godtyckliga konstanter $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Om $t = 0$ ger begynnelsevillkoren

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

varför $C_1 = 2$ och $C_2 = 1$.

Svar: $\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{9t}$.

8. De sökta vektorerna är $\mathbf{v} = \mathbf{u}_{\|\mathbb{V}}$ och $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$. För att bestämma $\mathbf{v}$ söker vi först en ortogonal bas $(\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2)$ för $\mathbb{V}$. Gram-Schmidt levererar $\mathbf{b}_1 = (-1,1,-3,0)$ och $\mathbf{b}_2 = (-1,0,-7,1) - (-1,0,-7,1)_{\|\mathbf{b}_1} = (1,-2,-1,1)$. Nu fås

$$\mathbf{u}_{\|\mathbb{V}} = \mathbf{u}_{\|\mathbf{b}_1} + \mathbf{u}_{\|\mathbf{b}_2} = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2 = (5,-7,7,2).$$

Svar: $\mathbf{v} = (5,-7,7,2)$, $\mathbf{w} = (6,3,-1,-1)$.

9.

(a) En känd sats berättar att en avbildning $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ är en vridning kring en linje genom origo om och endast om avbildningsmatrisen i någon ON-bas (såsom standardbasen) är en ON-matris med determinant 1. Att så är fallet här visas kanske enklast genom att demonstrera att den givna matrisen A uppfyller $AA^t = I$ och $\det(5A) = 125$, så att $\det A = \frac{1}{5^3} \cdot 125 = 1$.

(b) Linjen ℓ utgörs av F:s egenrum med egenvärde 1, nämligen $[(1,0,2)]$. Låt G beteckna ortogonal projektion på ℓ. Projektionsformeln ger $G(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{5}(1,0,2)$, $G(\mathbf{e}_2) = (0,0,0)$ och $G(\mathbf{e}_3) = \frac{2}{5}(1,0,2)$.

Svar: Avbildningsmatrisen är $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Om A betecknar en avbildningsmatris i standardbasen, så är $(1,1)$ en egenvektor med egenvärde s och $(2,3)$ en egenvektor med egenvärde t om och endast om

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t \end{pmatrix}.$$

Ekvationerna kan sammanfattas i den enda matrisekvationen

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & 2t \\ s & 3t \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} s & 2t \\ s & 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} s & 2t \\ s & 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar: Alla matriser på formen $\begin{pmatrix} 3s-2t & -2s+2t \\ 3s-3t & -2s+3t \end{pmatrix}$ där $s,t \in \mathbb{R}$ är godtyckliga parametrar.