Svar och lösningsskisser: TATA24 2021-01-10, förmiddag

1) $x=3, y=-1, z=2$ 2) $(3,-1,-1)$ 3) $x_1=2,\ x_2=-1$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ 5) $t(1,3),\ t\neq 0$ 6) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

---

7) $\mathbb{V}^\perp$ är lösningsrummet till systemet som har totalmatrisen

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right), \text{ så } \mathbb{V}^\perp = [(1,3,1,-1)].$$

Därför fås $\bar{u}_{/\!/\mathbb{V}^\perp} = \dfrac{(3,1,1,1)\bullet(1,3,1,-1)}{(1,3,1,-1)\bullet(1,3,1,-1)}(1,3,1,-1) = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}(1,3,1,-1)}}$

8) $Q(\underline{e}X) = X^t A X$, där $A = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$.

A:s egenvärden är 3 och 6 med egenrum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]$ resp. $\left[\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Q:s minsta värde på enhetscirkeln är alltså 3, vilket antas i $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

Det största är 6, vilket antas i $\pm\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

9) Systemet kan skrivas $X' = AX$, där $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

A:s egenvärden är $-1, 0$ och 1 med tillhörande egenrum $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ resp. $\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Systemets allmänna lösning är därför

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} C_1e^{-t} + C_2 + 2C_3e^t \\ C_1e^{-t} \\ C_1e^{-t} + C_2 + C_3e^t \end{pmatrix}}},\ C_i \in \mathbb{R}.$$

10) Låt $\mathbb{U} = \{\bar{u} \in \mathbb{V} : F(\bar{u}) = 2\bar{u}\}$ beteckna egenrummet till 2.

Vi visar $\mathbb{U} = V(F)$:

- $\bar{u} \in \mathbb{U} \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{2}F(\bar{u}) = F\left(\frac{1}{2}\bar{u}\right) \Rightarrow \bar{u} \in V(F)$. Alltså: $\mathbb{U} \subseteq V(F)$.
- $\bar{u} \in V(F) \Rightarrow$ Det finns $\bar{v} \in V$ så att $2\bar{u} = 2F(\bar{v}) = F^2(\bar{v}) = F(\bar{u}) \Rightarrow \bar{u} \in \mathbb{U}$.

  Alltså: $V(F) \subseteq \mathbb{U}$.

$\square$