1. $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ 2. $(5,4,0)$ 3. $\frac{1}{27}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ 5. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ 6. $a = \frac{3}{2}$

7. Då punkterna sätts in i linjens ekvation fås systemet

$$\begin{cases} -1 = -k + m \\ -1 = m \\ 0 = k + m \\ 2 = 2k + m \end{cases} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Normalekvationen är

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Svar: $y = x - \frac{1}{2}$

8. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & x_2 \\ -1 & -1 & 1 & 3 & x_3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & x_4 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & x_1 + 2x_2 + x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \end{array}\right)$$

Trappstegsmatrisen har pivotelement i kolonn 1–3, så en bas för $\mathbb{U}$ ges av de tre första generatorerna. Vidare framgår av rad 4 att $x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$ är en ekvation för $\mathbb{U}$, så $\mathbb{U}^\perp = ([(1,3,-1,2)]^\perp)^\perp = [(1,3,-1,2)]$.

Slutligen ser vi $(1,2,-1,-1) \bullet (1,3,-1,2) = 6 \neq 0$, så $(1,2,-1,-1) \notin \mathbb{U}$.

a) Svar: $((1,0,-1,-1)\ (2,-1,-1,0)\ (3,0,1,-1))$

b) Svar: $((1,3,-1,2))$

c) Svar: $(1,2,-1\ -1) \notin \mathbb{U}$

9. $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda-2)(\lambda-5)$

Egenvärdet 2 har egenrummet $\left[\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]$ och 5 har $\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$.

Således gäller $A = TDT^{-1}$ med $D = \begin{pmatrix}2&0\\0&5\end{pmatrix}$ och $T = \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$.

Därför:

$$A^n = TD^nT^{-1} = \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n&0\\0&5^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&2\\1&-1\end{pmatrix} = \dots = \underline{\underline{\begin{pmatrix}2\cdot 5^n - 2^n & 2^{n+1}-2\cdot 5^n\\ 5^n - 2^n & 2^{n+1}-5^n\end{pmatrix}}}$$

10. a) $\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^3 \det A = -\det A$, så $\det A = 0$, vilket visar att 0 är ett egenvärde till F med egenrum $N(F)$. Det räcker att visa att 0 är en enkelrot till sekularpolynomet. Notera nu att

$$\det(A-\lambda I) = \det(A^t - \lambda I) = (-1)^3 \det(A+\lambda I),$$

så λ är en rot omm $-\lambda$ är en rot. För något $w \in \mathbb{C}$ gäller alltså $\det(A-\lambda I) = -\lambda(\lambda-w)(\lambda+w)$. $A \neq 0 \Rightarrow w \neq 0$, så 0 är en enkelrot.

$\square$

b) Vi visar att $N(F) = V(F)^\perp$. Låt row och col beteckna rad- respektive kolonnrum. Vi har alltid $(\text{row}\,A)^\perp = N(F)$, men eftersom $A^t = -A$ gäller även

$$\text{row}\,A = \text{col}\,A^t = \text{col}(-A) = \text{col}\,A = V(F),$$

så $N(F) = V(F)^\perp$.

$\square$

(Anm. Alternativt kan man inse att $A = \begin{pmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{pmatrix}$ för $a,b,c \in \mathbb{R}$ och med Gausselimination reda ut att

$$N(F) = [(c,-b,a)] \text{ som är 1-dim eftersom } A \neq 0.$$

Det löser (a). För (b) räcker då att $(c,-b,a)$ är ortogonal mot varje kolonn i A.)