Lösningar till tentamen TATA24 2023-01-09

1. Ekvationssystemet kan skrivas $AX = B$ med $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$. Normalekvationerna $A^tAX = A^tB$ blir $\begin{pmatrix} 3\,x + y \\ x + 11\,y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ som har den unika lösningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Vi kan beräkna arean av parallellogrammet $OACB$ som normen av kryssprodukten $\overline{\mathbf{OA}} \times \overline{\mathbf{OB}} = (-2,\, 4,\, -2)$. Triangeln OAB har en area som är hälften av detta, nämligen $\sqrt{6}$.

3. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

4. Vi har att $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, så egenvärdet är 3.

5.
$$\begin{aligned} F(2\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2) &= 2F(\overline{\mathbf{e}}_1) + F(\overline{\mathbf{e}}_2) = \overline{\mathbf{e}}_1 + 3\overline{\mathbf{e}}_2 \\ F(\overline{\mathbf{e}}_1 - \overline{\mathbf{e}}_2) &= F(\overline{\mathbf{e}}_1) - F(\overline{\mathbf{e}}_2) = 5\overline{\mathbf{e}}_1 \end{aligned}$$

så $3F(\overline{\mathbf{e}}_1) = 6\overline{\mathbf{e}}_1 + 3\overline{\mathbf{e}}_2$ varför $F(\overline{\mathbf{e}}_1) = 2\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$. Insättning i andra ekvationen ger $F(\overline{\mathbf{e}}_2) = F(\overline{\mathbf{e}}_2) - 5\overline{\mathbf{e}}_1 = -3\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{\mathbf{e}}_2$. Det följer att avbildningsmatrisen i standardbasen är

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 6$

7. Vi skriver systemet som $X_{n+1} = AX_n$ med $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -12 & 6 \end{bmatrix}$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n, \end{pmatrix}$ $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Eftersom $A = TDT^{-1}$ med $T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ och $D^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix}$ så får vi att

$$X_n = A^nX_0 = (TDT^{-1})^nX_0 = TD^nT^{-1}X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3^n + 2 \cdot 2^n \\ -4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n \end{bmatrix}$$

8. Gram-schmidt på de givna uppspännande vektorerna för U ger ON-basen

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{pmatrix} = \left(\left(\tfrac{1}{7}\sqrt{7},\, -\tfrac{1}{7}\sqrt{7},\, \tfrac{2}{7}\sqrt{7},\, \tfrac{1}{7}\sqrt{7}\right) \quad \left(\tfrac{2}{5}\sqrt{5},\, 0,\, -\tfrac{1}{5}\sqrt{5},\, 0\right) \quad \left(0,\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2},\, 0,\, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) \right)$$

för delrummet U.

Vi beräknar ortogonala komplementet $U^{\perp}$, som har dimension 1, som nollrummet till $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, vilket mycket riktigt är ett-dimensionellt och spänns av enhetsvektorn

$$\mathbf{f}_4 = \left(\frac{1}{35}\sqrt{7}\sqrt{5}\sqrt{2},\ \frac{1}{14}\sqrt{7}\sqrt{5}\sqrt{2},\ \frac{2}{35}\sqrt{7}\sqrt{5}\sqrt{2},\ -\frac{1}{14}\sqrt{7}\sqrt{5}\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{70}}(2,\ 5,\ 4,\ -5)\,.$$

Så $\left(\mathbf{f}_4\right)$ är en ON-bas för delrummet $U^{\perp}$.

Nu blir

$$\left(\mathbf{f}_1 \quad \mathbf{f}_2 \quad \mathbf{f}_3 \quad \mathbf{f}_4\right)$$

en ON-bas för $\mathbf{R}^4$ där varje basvektor aningen tillhör U eller $U^{\perp}$.

9. Vi kallar matrisen för M och ser att $M^tM = I$ samt att $\det(M) = -1$. Avbildningen F är alltså en vridspegling. Vi hittar egenvektorn $\overline{\mathbf{v}} = \underline{e}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ som hör till egenvärdet -1.

Vridningsaxeln ℓ är linjära höljet till $\overline{\mathbf{v}}$, så ℓ har ekvation

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

För att hitta vridningsvinkeln så tar vi en enhetsvektor $\overline{\mathbf{w}}$ ortogonal mot $\overline{\mathbf{w}}$, till exempel $\overline{\mathbf{w}} = \underline{e}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Då vrids $\overline{\mathbf{w}}$ i planet ortogonalt mot vridningsaxeln, och vi kan mäta vridningsvinkeln genom

$$\cos(\alpha) = \overline{\mathbf{w}} \cdot F(\overline{\mathbf{w}}) = (0,\ 1,\ 0)\cdot\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Så $\alpha = \arccos\frac{2}{3}$.

10. Sätt $\overline{\mathbf{f_1}} = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2},\ -\frac{1}{2}\sqrt{2},\ 0\right)$, $\overline{\mathbf{f_2}} = \left(\frac{1}{6}\sqrt{6},\ \frac{1}{6}\sqrt{6},\ -\frac{1}{3}\sqrt{6}\right)$, och

$$\overline{\mathbf{f}}_3 = \overline{\mathbf{f_1}} \times \overline{\mathbf{f_2}} = \left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2},\ \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2},\ \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2}\right).$$

Eftersom avbildningen är symmetrisk med determinant noll så är de tre egenvärdena $-1, 2, 0$ och de tre egenrummen är ett-dimensionella och ortogonala mot varandra, alltså spända av $\overline{\mathbf{f_1}}, \overline{\mathbf{f_2}}, \overline{\mathbf{f_3}}$. I egenvektorsbas har den avbildningsmatris $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, vi kan ändra ordningen på egenvärdena men det är den enda frihet vi har.

I originalbasen blir avbildningsmatrisen

$$A = TDT^t$$

där egenvektorerna är kolonner i T, listade i samma ordning som egenvärdena dyker upp i D. Om vi tar plus eller minus egenvektorerna spelar ingen roll. Lösningen blir

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Kontroll:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$