TATA24 2024-08-23

SVAR & LÖSNINGSSKISSER

1) $\ell_a \parallel \Pi \Leftrightarrow (1,2,a)\cdot(1,1,2)=0 \Leftrightarrow 3+2a=0 \Leftrightarrow a=-\frac{3}{2}$.

<u>Svar</u>: $a=-\frac{3}{2}$.

2) Tag $\bar{b}_1=(3,5)$ och $\bar{b}_2$ ortogonal mot $\bar{b}_1$, t.ex. $\bar{b}_2=(5,-3)$. Normera.

<u>Svar</u>: $\left(\frac{1}{\sqrt{34}}(3,5)\ \ \frac{1}{\sqrt{34}}(5,-3)\right)$.

3) Låt $P=(3,5,7)$, $Q=(4,6,8)$, $R=(3,3,3)$. Sökt area:

$$\frac{1}{2}\left|\overline{PQ}\times\overline{PR}\right| = \frac{1}{2}\left|\underline{e}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\times\underline{e}\begin{pmatrix}0\\-2\\-4\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\underline{e}\begin{pmatrix}-2\\4\\-2\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}=\sqrt{6}.$$

<u>Svar</u>: $\sqrt{6}$.

4) $$\begin{vmatrix}1&1&0&2\\0&-1&3&0\\0&0&1&0\\5&0&4&0\end{vmatrix} = -2\cdot\begin{vmatrix}0&-1&3\\0&0&1\\5&0&4\end{vmatrix} = -2\cdot(-1)\cdot\begin{vmatrix}0&-1\\5&0\end{vmatrix} = 2\cdot 5 = 10.$$

<u>Svar</u>: 10.

5) $F(\bar{u}) = \bar{u}-2\bar{u}_{\parallel(1,2)} = \bar{u}-2\dfrac{\bar{u}\cdot(1,2)}{5}(1,2)$, så

$F((1,0)) = (1,0)-\frac{2}{5}(1,2) = (\frac{3}{5},-\frac{4}{5}) = \frac{1}{5}\underline{e}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$ och

$F((0,1)) = (0,1)-\frac{4}{5}(1,2) = (-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}) = \frac{1}{5}\underline{e}\begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix}$.

<u>Svar</u>: $\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-4&-3\end{pmatrix}$.

6) $$p(x)=a(x^2+x+1)+b(x+1)+c(x+2) \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\a+b+c=1\\a+b+2c=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\b=0\\c=-2.\end{cases}$$

<u>Svar</u>: koordinatmatrisen är $\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix}$.

7) Först en ortogonal bas för U: $\bar{b}_1=(1,2,1,2)$, $\bar{b}_2=(2,1,2,1)-(2,1,2,1)_{\parallel\bar{b}_1}$

$= (2,1,2,1)-\frac{4}{5}(1,2,1,2)$

$= \frac{1}{5}(6,-3,6,-3) \parallel (2,-1,2,-1)$.

Nu för $U^\perp = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4): \begin{cases}x_1+2x_2+x_3+2x_4=0\\2x_1-x_2+2x_3-x_4=0\end{cases}\right\} =$

$= \dots = [(1,0,-1,0),(0,1,0,-1)]$, så tag $\bar{b}_3=(1,0,-1,0)$, $\bar{b}_4=(0,1,0,-1)$.

Normera.

<u>Svar</u>: $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(1,2,1,2)\ \ \frac{1}{\sqrt{10}}(2,-1,2,-1)\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)\right)$

8) $Q_a(x,y) = (x\ y)A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ med $A = \begin{pmatrix}a+2 & a\\ a & a+2\end{pmatrix}$.

A:s sekularpolynom är $(a+2-\lambda)^2 - a^2 = 2a(2-\lambda) + (2-\lambda)^2 =$
$= (2-\lambda)(2a+2-\lambda)$,

så A:s egenvärden är 2 och $2a+2$.

a) Q_a pos. def. $\Leftrightarrow$ alla A:s egenvärden är positiva.

<u>Svar.</u> $a > -1$.

b) Då $a=2$ är egenvärdena 2 och 6, så att

$$2\cdot|\bar{u}|^2 \leq Q_2(\bar{u}) \leq 6\cdot|\bar{u}|^2$$

med likhet omm $\bar{u}$ tillhör respektive egenrum, vilka är $[(1,-1)]$ för $\lambda=2$ och $[(1,1)]$ för $\lambda=6$.

Enhetscirkeln ges av $|\bar{u}|=1$, så:

<u>Svar:</u> max: 6 antas då $(x,y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$,
min: 2 antas då $(x,y) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

9) $A^tA = I$, så F är en isometri. $\det A = -1$ visar då att F är en vridspegling. $\square$

En vektor $\bar{n} = (x_1, x_2, x_3)$ är ortogonal mot det sökta planet om $F(\bar{n}) = -\bar{n}$, dvs om $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ tillhör egenrummet till 9A med egenvärde -9:

$$\begin{pmatrix}-1 & 8 & 4\\ -8 & 1 & -4\\ 4 & 4 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9x_1\\-9x_2\\-9x_3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ t\in\mathbb{R}.$$

Planet ges alltså av $x_1 - 2x_3 = 0$. Tag en nollskild vektor i planet, t.ex. $\bar{u} = (0,1,0)$. Då är $F(\bar{u}) = \frac{1}{9}(8,1,4)$, och sökt vinkel är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $F(\bar{u})$, nämligen

$$\theta = \arccos\frac{\bar{u}\cdot F(\bar{u})}{|\bar{u}|\cdot|F(\bar{u})|} = \arccos\frac{1}{9}.$$

<u>Svar.</u> Planets ekv.: $x_1 - 2x_3 = 0$.
Vinkel: $\arccos\frac{1}{9}$.

10) Antag att A är F:s avbildningsmatris i varje bas för V. Om det fanns $\bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, som inte var en egenvektor till F, så skulle det finnas baser

$$\underline{b} = (\bar{v} \;\; F(\bar{v}) \cdots) \text{ och } \underline{c} = (2\bar{v} \;\; F(\bar{v}) \cdots)$$

för V. I basen $\underline{b}$ skulle A:s första kolonn vara $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, men i $\underline{c}$ skulle den vara $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, vilket är omöjligt.

Alltså är varje $\bar{v} \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$, en egenvektor till F. Alla baser för V består alltså av F-egenvektorer, så A är diagonal. A:s första kolonn är alltså $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ för något $k \in \mathbb{R}$, där k är egenvärdet till första basvektorn. Varje $\bar{v} \neq \bar{0}$ kan ju väljas som första basvektor, så k är det enda egenvärdet. Således är $F(\bar{v}) = k\bar{v} \;\; \forall \bar{v} \in V$.

$\square$