Tentamen TATA24 20250113

Jan Snellman och Axel Hultman

Del A

1

Planet Π har ekvationen $-x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -9$.

2

$$X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -14 & 10 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Del B

4

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

5

Matrisens determinant är $(6-a)a$ så matrisen saknar invers omm $a \in \{0, 6\}$.

6

Matrisen gånger vektorn blir $(3\ 3\ 3\ 3)^t = 3\,(1\ 1\ 1\ 1)^t$ så egenvärdet är 3.

Del C

7

(a)

Med Gram-Schmidt får vi att en ON-bas till $\mathbb{U}$ är

$$\left(\frac{1}{\sqrt{19}}(1,1,-4,-1) \quad \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,0,-1) \right).$$

(b)

Vi bildar matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & -3 \\ 3 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

så att $\underline{\mathbf{e}}X \in \mathbb{U}^\perp$ omm X tillhör nollrummet till A. En bas till $\mathbb{U}^\perp$ är därför

$$((4,0,3,-8) \quad (0,1,0,1)).$$

(c)

Vi kontrollerar huruvida $X = (4 \;\; 4 \;\; 3 \;\; -4)^t$ ligger i nollrummet till A genom att beräkna $AX = (0 \;\; 0 \;\; 0)^t$. Alltså är det sant att $(4,4,3,-4) \in \mathbb{U}^\perp$.

8

Systemet kan skrivas $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n X_0$, $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrisen A är diagonaliserbar som $A = TDT^{-1}$ med $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ och $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Således gäller $X_n = TD^nT^{-1}X_0$ varför

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 2^n,$$
$$b_n = 3^n - 2^n.$$

9

(a)

Matrisen A uppfyller $AA^t = I$, $\det(A) = 1$, så avbildningen är en vridning kring en linje genom origo.

(b)

Egenrummet till egenvärdet $\lambda = 1$ spänns av $\mathbf{v} = (3,\ 2,\ 0)$, så ℓ ges av $(x_1, x_2, x_3) = t(3, 2, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

(c)

Vektorn $\mathbf{e}_3$ är ortogonal mot $\mathbf{v}$, så $\mathbf{e}_3$ ligger i vridningsplanet. Vi mäter vridningsvinkeln som vinkeln mellan $\mathbf{e}_3$ och $F(\mathbf{e}_3) = (-2/7, 3/7, -6/7)$. Eftersom $\mathbf{e}_3$ och $F(\mathbf{e}_3)$ är enhetsvektorer ges cosinus för denna vinkel av skalärprodukten $\mathbf{e}_3 \bullet F(\mathbf{e}_3) = -6/7$, så $\theta = \arccos\left(-\frac{6}{7}\right)$.

10

(a)

I den naturliga basen $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$ för $\mathbb{P}_2$ har avbildningen matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sekularpolynomet är $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda) \cdot \lambda^2$ och egenvärdena följaktligen 2 och 0.

Till egenvärdet 2 har A egenrummet spänt av $(5\ \ 6\ \ 2)^t$, så motsvarande egenrum för F har basen $(5 + 6x + 2x^2)$.

Till egenvärdet noll har A egenrummet spänt av $(1\ \ 0\ \ 0)^t$, så F:s egenrum (som också är F:s nollrum) till egenvärdet noll har basen (1). (Nollrummet består alltså av de konstanta polynomen.)

Eftersom den geometriska multipliciteten är 1 och den algebraiska 2 för egenvärdet noll, så kan inte F diagonaliseras.

(b)

Vi har redan sett att $N(F)$ har basen (1). De två nollskiljda kolonnerna i A är inte parallella, så de utgör koordinatmatriserna för polynomen i en bas till $V(F)$ som alltså har basen $(1\ \ \ 2 + 6x + 2x^2)$.