TATA24 2025-03-17

SVAR & LÖSNINGSSKISSER

1) $(1,1,1)\times(1,-1,2) = (3,-1,-2)$, som har längd $\sqrt{14}$.

Svar: $\frac{2}{\sqrt{14}}(3,-1,-2)$ (eller $-\frac{2}{\sqrt{14}}(3,-1,-2)$)

2) $\begin{cases} 1 = -2+t \\ 1+s = 2 \\ 1+2s = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s=1 \\ t=3 \end{cases}$. Svar: $(1,2,3)$

3) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & 4 & -8 & 7 \\ 4 & 2 & -4 & 8 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. Svar: $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2+2t \\ x_3 = t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

4) $F(\bar{u}) = \bar{u} - \frac{\bar{u}\cdot(1,2,-1)}{6}(1,2,-1)$, så basvektorernas bilder är

$F(\bar{e}_1) = \frac{1}{6}(5,-2,1)$

$F(\bar{e}_2) = \frac{1}{6}(-2,2,2)$

$F(\bar{e}_3) = \frac{1}{6}(1,2,5)$

Svar: $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ a+3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ \lambda = 2 \end{cases}$. Svar: $a=3$

6) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{\underline{8}}.$

7) Låt $Q((x_1,x_2)) = -6x_1^2 - 24x_1x_2 + x_2^2$.

Då fås $Q(\underline{e}X) = X^tAX$ med $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & 1 \end{pmatrix}$.

A:s egenvärden är 10 och −15, och en tillhörande ON-bas av egenvektorer är $\underline{f} = (\bar{f}_1\ \bar{f}_2) = \left(\frac{1}{5}(3,-4)\ \ \frac{1}{5}(4,3)\right)$.

I denna bas är kurvans ekvation $10y_1^2 - 15y_2^2 = 5$, så närmast origo ligger punkterna där $y_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_2 = 0$, dvs

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\bar{f}_1 = \pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(3,-4)$.

Svar: Minsta avståndet är $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Det antas i $\pm\frac{1}{5\sqrt{2}}(3,-4)$.

8) Om påståendet stämmer, måste $U = V(F)$ vara matrisens kolonnrum, alltså $[(1,1,2)]$.
För att visa påståendet, räcker det att visa att F avbildar basvektorerna (i någon bas för $\mathbb{R}^3$) på deras ortogonala projektioner på $[(1,1,2)]$.
Det blir enklast att välja basen $\underline{b} = (\bar{b}_1\ \bar{b}_2\ \bar{b}_3)$ med $\bar{b}_1 \in [(1,1,2)]$ och $\bar{b}_2, \bar{b}_3 \in [(1,1,2)]^\perp$, t. ex.

$$\bar{b}_1 = (1,1,2),\ \bar{b}_2 = (1,-1,0),\ \bar{b}_3 = (0,2,-1).$$

Då ska det visas att $F(\bar{b}_1) = \bar{b}_1$ och $F(\bar{b}_2) = F(\bar{b}_3) = \bar{0}$:

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$ som önskat. $\square$

Svar: Bevis ovan. En bas för U är $((1,1,2))$.

9) Systemet kan skrivas $X' = AX$ med $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.
A:s egenvärden är 1 och 2 med motsvarande egenrum $[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}]$ resp. $[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}]$, så systemets allmänna lösning är $X = C_1\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^t + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{2t}$ $(C_1, C_2 \in \mathbb{R})$.
Begynnelsevillkoren säger $\begin{cases} 3C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 + C_2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 2 \\ C_2 = -5. \end{cases}$

Svar: $\begin{cases} x_1(t) = 6e^t - 5e^{2t} \\ x_2(t) = 4e^t - 5e^{2t} \end{cases}$

10) Låt $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Då blir XY^t den $n \times n$-matris vars i:e kolonn är $y_i X$, $1 \le i \le n$. Alltså gäller $\mathrm{col}(XY^t) \subseteq [\underline{e}X]$. Eftersom $y_i \neq 0$ för något i, gäller likhet. Vidare måste $\dim[\underline{e}X] = 1$, ty $X \neq 0$.
Således är $\dim(\mathrm{col}(XY^t)) = \dim([\underline{e}X]) = 1$. $\square$