Lösningar till Tentamen TATA24

Jan Snellman och Axel Hultman

2025-08-22

1. Kalla punkterna A, B, C. Då är $\mathbf{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = (-2, -3, -5)$, så planets ekvation blir $-2x - 3y - 5z = D$, med $D = \mathbf{n} \bullet \overline{OA} = -1$. Vi kan multiplicera med -1 och skriva planets ekvation som

$$2x + 3y + 5z = 1.$$

2. Låt $A = (1, 3, 1)$, $P = (-4, 7, 6)$ och $\mathbf{v} = (3, -2, -1)$. Då är $\overline{AP} = (-5, 4, 5)$ och ortogonala projektionen av denna vektor blir

$$\overline{AP}_{\parallel} = \frac{\overline{AP} \bullet \mathbf{v}}{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}} = \frac{(-5, 4, 5) \bullet (3, -2, -1)}{(3, -2, -1) \bullet (3, -2, -1)}(3, -2, -1) = (-6, 4, 2),$$

så

$$\overline{AP}_{\perp} = \overline{AP} - \overline{AP}_{\parallel} = (-5, 4, 5) - (-6, 4, 2) = (1, 0, 3).$$

Vi har att avståndet punkt-linje är längden av $\overline{AP}_{\perp}$, dvs avståndet är $\sqrt{10}$.

3. Vi har minstakvadratproblemet $AX = B$, med $X = (x\,y)^t$, $B = (0\,2\,1)^t$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. Notera att A har linjärt oberoende kolonner. MK-lösningen är således unik, och ges av lösningen till normalekvationerna $A^tAX = A^tB$, som är $X = (2\,3)^t$. Så $x = 2, y = 3$ är den unika MK-lösningen.

4. Låt A vara den sökta matrisen. Då är $AB = C$ med $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Så $A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. -23.

6. Låt A vara avbildningsmatrisen i standardbasen och låt B vara avbildningsmatrisen i den ny basen. Låt T vara basbytesmatrisen som

uttrycker den nya basen i standardbaskoordinater. Basbytesformeln ger

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Vi får att $X = (1/2)B^tBA$, så $X = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

8. A har egenvärden $6, -5$ och motsvarande egenvektorer $(3, 1)$ och $(2, -3)$. Med
$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix},$$
och $A = TDT^{-1}$ så blir
$$\begin{aligned} A^n &= TD^nT^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & (-5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 9 \cdot 6^n + 2\,(-5)^n & 6 \cdot 6^n - 6\,(-5)^n \\ 3 \cdot 6^n - 3\,(-5)^n & 2 \cdot 6^n + 9\,(-5)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

9. Gram-Schmidt med den exotiska skalärprodukten ger $g_1 = f_1 = (1, 1, 1)$, $f_2 = (0, 2, 3)$, $g_2 = f_2 - \frac{(f_2|g_1)}{(g_1|g_1)} g_1 = (-2, 0, 1)$. Exotisk normering ger sedan ON-basen
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}} g_1 & \frac{1}{\sqrt{3}} g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{8}}(1, 1, 1) & \frac{1}{\sqrt{3}}(-2, 0, 1) \end{pmatrix}.$$

10. E_1 har bas $\big((1, -1, 0) \quad (0, 0, 1)\big)$ och E_2 har bas $\big((1, 1, 0)\big)$. I den bas $\mathbf{f}$ till $\mathbb{R}^3$ som sammanslagningen av dessa baser ger så har avbildningen, per definition av egenrum, matris
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Låt $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vara basbytesmatrisen från standardbasen till den nya basen $\mathbf{f}$. I standardbasen så har avbildningen matris
$$A = TDT^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$