

Lösningar till Tentamen i Linjär Algebra TATA24

Jan Snellman och Axel Hultman

2026-01-17

1 Del A och B

1	2	3	4	5	6
$\arccos(\frac{-1}{\sqrt{70}})$	$(8, -2, 0)$	$k = 8$	$a \in \{-2, 1\}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2 Del C

7. Gram-Schmidt ger en ortogonal bas $(\mathbf{f}_1 \ \mathbf{f}_2 \ \mathbf{f}_3)$ med

$$\mathbf{f}_1 = (1, 0, -1, 1), \mathbf{f}_2 = (4, 2, 4, 0), \mathbf{f}_3 = (0, 4, -2, -2).$$

Med $\mathbf{w} = (-1, 4, -1, 3)$ så är

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^3 \frac{\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{w}}{\mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j} \mathbf{f}_j = (1, 2, -2, 0)$$

och $\mathbf{v} = \mathbf{w} - \mathbf{u} = (-2, 2, 1, 3)$.

Svar: En ON-bas ges av $(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{f}_1 \ \frac{1}{6}\mathbf{f}_2 \ \frac{1}{2\sqrt{6}}\mathbf{f}_3)$. Vektorerna $\mathbf{u} \in \mathbb{U}$, $\mathbf{v} \in \mathbb{U}^\perp$ ovan uppfyller att $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (-1, 4, -1, 3)$.

8. Kalla avbildningsmatrisen för M . Eftersom

$$\begin{aligned} (M \ I) &= \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

så gäller att

$$V(F) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 - 2x_4 = 0, x_2 - 2x_3 + x_4 = 0\}.$$

Snittet $V(F) \cap N(F)$ kan alltså ges som nollrummet till matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har ett nollrum som är ett-dimensionellt, spänt av $(0, 2, 1, 0)$.

Svar: $V(F) \cap N(F)$ har bas $((0, 2, 1, 0))$.

9. Vi kan skriva $Q(\mathbf{e}X) = X^t A X$ med $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Egenvär-

dena till A är $\pm\frac{3}{2}$ och 1, så Q är indefinit. Största värdet av Q på enhetssfären är $\lambda_{max} = \frac{3}{2}$, medan det minsta värdet är $\lambda_{min} = -\frac{3}{2}$. Närmsta avstånd till nivåytan $Q = 4$ är minsta $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}$ under bivillkoret $-\frac{3}{2}y_1^2 + y_2^2 + \frac{3}{2}y_3^2 = 4$. Detta inträffar då $y_1 = y_2 = 0$ och $y_3^2 = \frac{8}{3}$, så minsta avstånd är $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

Svar: Q är indefinit. Största värde på enhetssfären är $\frac{3}{2}$, minsta värde på enhetssfären är $-\frac{3}{2}$. Det minsta avståndet från origo till nivåytan $Q = 4$ är $\sqrt{\frac{8}{3}}$.

10. Avbildningsmatrisen är en ON-matris (ortogonalmatris) med determinant -1 , så avbildningen är en orienteringsreverserande isometri. Klassificeringen av isometrier i $\mathbb{R}^3$ ger att avbildningen antingen är en spegling eller en vridspegling. Egenvärdena är 1 och -1 , där 1 har multiplicitet 2. Följaktligen är avbildningen en ren spegling. Egenrummet till egenvärdet -1 spänns av vektorn $(4, -5, 3)$.

Svar: Avbildningen är spegling i planet $4x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0$.