TATA24, TENTAMEN 2026-03-16
SVAR & LÖSNINGSSKISSER

1. $(2,2,1)\times(0,1,1)=(1,-2,2)$, som har längd 3. **Svar:** $\pm(1,-2,2)$.

2. Låt $P=(7,-4)$. Origo ligger på linjen, som har $\bar{n}=\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ som normalvektor. Sökt avstånd: $\left|\overline{OP}_{/\!/\bar{n}}\right| = \left|\dfrac{\underline{e}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}\cdot\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}}{5}\,\underline{e}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right| = 3\sqrt{5}$.

3. Normalekvationen är $\begin{pmatrix}2&2&-1\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-3\\2&-1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-1\\-3&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8\\6\\-8\end{pmatrix}$.

Totalmatris:
$$\left(\begin{array}{cc|c}9&-9&36\\-9&11&-38\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&4\\0&2&-2\end{array}\right).$$

Svar: $x=3$, $y=-1$.

4. Låt $\underline{x}=(1\ \ x\ \ x^2)$. $F(1)=1=\underline{x}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $F(x)=2x+1=\underline{x}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$, $F(x^2)=3x^2+2x=\underline{x}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$.

Svar: $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{pmatrix}$.

5. $N(F)$ är planets ortogonala komplement. **Svar:** $((1,3,-2))$.

6. $\begin{pmatrix}3&-2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. **Svar:** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ (t ex).

7. $$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&x_1\\-1&1&5&x_2\\1&3&-1&x_3\\2&2&8&x_4\end{array}\right)\sim\cdots\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&4&x_1\\0&2&9&x_1+x_2\\0&0&14&2x_1+x_2-x_3\\0&0&0&2x_1-x_4\end{array}\right).$$

Nedersta raden visar att $V(F)^{\perp}=[(2,0,0,-1)]$. Pivotelementens positioner (eller $\dim V(F)=\dim\mathbb{R}^4-\dim V(F)^{\perp}=3$) visar att M:s kolonner är linjärt oberoende, så $((1,-1,1,2)\ (1,1,3,2)\ (4,5,-1,8))$ är en bas för $V(F)$. Gram-Schmidt:

$\bar{b}_1=(1,-1,1,2)$, $\bar{b}_2=(1,1,3,2)-(1,1,3,2)_{/\!/\bar{b}_1}=(0,2,2,0)$,

$\bar{b}_3=(4,5,-1,8)-(4,5,-1,8)_{/\!/\bar{b}_1}-(4,5,-1,8)_{/\!/\bar{b}_2}=(2,5,-5,4)$.

Fyll ut med en basvektor för $V(F)^{\perp}$ och normera.

Svar: $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}(1,-1,1,2)\ \ \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0)\ \ \frac{1}{\sqrt{70}}(2,5,-5,4)\ \ \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,0,-1)\right)$.

8. Att A är inverterbar visar vi genom att bestämma A^{-1}, som vi ändå behöver. (Att B^{-1} finns får väl anses givet i uppgiften.)
Vi får då

$$(3B+AXB^{-1})^t = -B^t \Leftrightarrow AXB^{-1} = -4B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X = -4A^{-1}B^2 = -4\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 0 & 4\\ -4 & 1 & -4\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix} = \underline{\underline{4\begin{pmatrix}21 & -4 & 20\\ 16 & -5 & 15\\ -9 & 0 & -9\end{pmatrix}}}$$

9. a) Systemet kan skrivas $X' = AX$, där $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ och $A = \begin{pmatrix}-4 & 6\\ 6 & -9\end{pmatrix}$.
A:s egenvärden är 0 och -13 med tillhörande egenrum $\left[\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right]$ respektive $\left[\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\right]$, så $X = c_1\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}e^{0t} + c_2\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}e^{-13t}$.

Svar: $\begin{cases} x(t) = 3c_1 + 2c_2e^{-13t},\\ y(t) = 2c_1 - 3c_2e^{-13t}, \end{cases}$ där $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) De konstanta lösningarna ges av $c_2 = 0$, vilket innebär $x(0) = 3c_1$, $y(0) = 2c_1$.
Svar: $(a,b) = (3s, 2s)$, $s \in \mathbb{R}$.

10. a) Alla F:s avbildningsmatriser har samma determinant, men $\det B = -18 \neq 6 = \det A$. $\square$

b) Vi vill hitta en basbytesmatris T så att $A = TCT^{-1}$.
Genom att hitta egenvärden och egenvektorer kan vi diagonalisera A och C och få $A = T_1DT_1^{-1}$ och $C = T_2DT_2^{-1}$, där $T_1 = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $T_2 = \begin{pmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ och $D = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.
Vi har nu

$$A = T_1DT_1^{-1} = T_1T_2^{-1}CT_2T_1^{-1} = T_1T_2^{-1}C(T_1T_2^{-1})^{-1},$$

så $T = T_1T_2^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ duger.
Svar: $\big((-5,2)\ (7,-3)\big)$ (t ex).