Linköpings universitet
Matematiska institutionen
Matematik och tillämpad matematik

Kurskod: TATA24
Provkod: TEN1

Tentamen i TATA24 Linjär Algebra

2019-01-16 kl 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Ej räknedosa.

På del A och B (uppgift 1–6) ska endast svar ges. De ska lämnas på ett gemensamt papper. *Varje uppgift på del A och B ger högst 1 poäng.*

Uppgifterna på del C (uppgift 7–10) ger högst 3 poäng per uppgift, och till dessa krävs fullständiga och välmotiverade lösningar.

För betyg 3/4/5 krävs minst 2 poäng på del A, minst 2 poäng på del B, minst 2/3/4 uppgifter på del C som bedömts med minst 2 poäng vardera, samt minst 8/12/16 poäng totalt.

Godkänd kontrollskrivning *ger 3 poäng på del A (uppgift 1–3) som då inte behöver lösas. Markera detta genom att skriva "G" i rutorna för uppgift 1–3.*

Svar finns efter skrivningstidens slut på kursens hemsida.

Nedan ges $\mathbb{R}^n$ alltid standardskalärprodukten, och standardbasen i $\mathbb{R}^n$ ses som ett höger ON-system när lämpligt.

DEL A

1. Bestäm minstakvadratlösningen till ekvationssystemet $\begin{cases} x_1 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 2 \\ & x_2 = 2 \end{cases}$.

2. Beräkna inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Ange en ekvation på normalform för det plan i $\mathbb{R}^3$ som innehåller punkten $(2, 1, 3)$ och linjen $(1 + 2t, -1, t)$, $t \in \mathbb{R}$.

DEL B

4. Den linjära avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ har avbildningsmatris $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ i standardbasen. Bestäm alla F:s egenvärden och motsvarande egenrum.

5. Beräkna determinanten av matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Avbildningen $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ är linjär och avbildar $(1, 2)$ på $(1, 2, 3)$ och $(0, 1)$ på $(-1, 1, 0)$. Ange F:s avbildningsmatris i standardbaserna för $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

VÄND!

DEL C

7. Låt $\mathbb{V}$ vara det linjära höljet $\big[(1,0,2,1),\ (1,1,-3,-1),\ (-3,-1,5,-1)\big]$ i $\mathbb{R}^4$. Bestäm en ON-bas för $\mathbb{V}$ och en ON-bas för $\mathbb{V}^{\perp}$.

8. Lös systemet av differensekvationer $\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} + 2b_{n-1} \\ b_n = -4a_{n-1} - b_{n-1} \end{cases}$ med begynnelsevärdena $a_0 = 1$ och $b_0 = 2$.

9. Bestäm de punkter som ligger närmast origo på den ellipsoid i $\mathbb{R}^3$ som ges av

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 8.$$

10. Låt $\mathbb{V}$ vara ett vektorrum och låt $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{V}$.
    (a) Vad är definitionen av att vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ är linjärt oberoende? (1p)
    (b) Visa att om $\mathbb{V}$ är ett euklidiskt rum och vektorerna $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ är nollskilda och parvis ortogonala så är $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ linjärt oberoende. (2p)

LYCKA TILL!